نظرية البيان



السنة الثالثة

قسم الرياضيات

منشورات جامعة دمشق

كلية العلوم



نظرية البيان

الدكتور

خالد الخنيفس

أستاذ في قسم الرياضيات

جامعة دمشق


جامعة دمشق
Damascus University

فهرس المحتويات

المقدمة

كان ابن الرّشد يقول دائماً "إن أنسأ الله في العمر" فسوف أكتب كتاباً في الفقه أو الفلسفة. وهذه العبارة تتكرر في كل كتبه. وقد كنتُ أقول كما قال أستاذنا "ابن رّشد" إنّ أنسأ الله في الأجل فسوف أقوم بتوضيح وتجديد وإضافة ما يمكن إضافته من معرفة في علوم نظرية البيان.

إن ما كتبناه بالأمس وإن كان معاصراً وحديثاً سيصبح في عالم الغد قديماً وعتيقاً حتى مع بقاء الموضوع والحقل نفسه طازجاً مثل انبلاج الفجر بنور الحلم الإنساني الزاخر بشآبيب الأمل والمعرفة.

أقدم هذا الجهد العلمي المتواضع للطلبة الدارسين في هذا التخصص عسى الله أن ينفعهم به ويجدوا في ثناياه بعض ما تصبو إليه نفوسهم الشابة والمتألقة دائما بأنفاس الوطن.

ظهرت نظرية البيان في بداية القرن الثامن عشر، إذ يعود الفضل إلى عالم الرياضيات السويسري ليونارد أويلر (Leonard Euler). في العام 1736م قام أويلر بنشر حل لمسألة الجسور السبعة ، ونشرت في القرن التاسع عشر الميلادي عدة نتائج مهمة في نظرية البيان. و ألف العالم الرياضي كونك (KONIG) في العام 1936م أول كتاب حول نظرية البيان.

وزاد الاهتمام بنظرية البيان في منتصف القرن العشرين، بسبب إمكان تطبيقها في مجالات متعددة. في الحقيقة، إذا كانت لدينا مجموعة متقطعة من العناصر وكان بعض أزواجها مرتبطة بطريقة ما فإن نظرية البيان تزودنا بنموذج رياضي لتلك المجموعة ، ومن المكمن أن تكون هذه العناصر ذرات جزيء عضوي مرتبطة كيميائياً أو أفراد مجتمع مرتبطين بعلاقات عائلية ..... الخ.

ظهرت في البداية نظرية البيان بوصفها أداة لحل بعض الألغاز والألعاب

ولكن تطبيقاتها في القرن الماضي شملت مجالات واسعة مثل علم الحاسوب، بحوث العمليات، الاقتصاد، الكيمياء، الهندسة الكهربائية وعلوم اللغة...الخ.

أشكر أستاذي الفاضل الدكتور Prof. Dr. Habil. H. Sachs لمساعدته في الحصول على المراجع العلمية والدكتور Prof. Dr. P. John و F. Reyhani لمساعدتهم على الحصول على المراجع والكتب المفيدة في هذا المجال.

إن هذا الكتاب محاولة جادة لوضع ما يحتاج إليه القارئ حقاً. نسأل الله التوفيق والرضا ونهدي هذا الكتاب إلى كل من يرغب باللحاق بالركب العلمي العالمي، أملين أن يكون مرجعاً مفيداً لكل المهتمين.

إن قيمة هذا الكتابِ بمعرفته مثلما تكون قيمة كل امرئ بمعرفته ومن لا معرفة له لا قيمة له.

﴿أَوَ مَن كَانَ مَيْتاً فَأَحْيَيْنَاهُ وَجَعَلْنَا لَهُ نُوراً يَمْشِي بِهِ فِي النَّاسِ كَمَن مَّثَلُهُ فِي الظُّلُمَاتِ لَيْسَ بِخَارِجٍ مِّنْهَا كَذَلِكَ زُيِّنَ لِلْكَافِرِينَ مَا كَانُواْ يَعْمَلُونَ﴾ " الأنعام 122"

والله ولي التوفيق

دمشق في 2010/2/12

المؤلف

أ.د. خالد الخنيفس

الفصل الأول

مفاهيم أساسية

Basic Concepts

1-مقدمة

ظهرت نظرية البيان في بداية القرن الثامن عشر، إذ يعود الفضل إلى عالم الرياضيات السويسري ليونارد أويلر (Leonard Euler). في العام 1736م قام أويلر بنشر حل لمسألة الجسور السبعة.

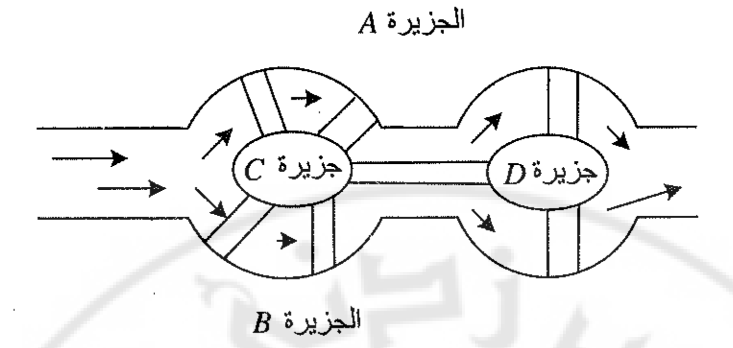
ظهرت في البداية نظرية البيان بوصفها أداة لحل بعض الأحاجي والألغاز والألعاب وفيما يأتي نذكر بعض المسائل:

- **مسألة الجسور السبعة:**

يوجد جسور سبع في مدينة (كونج بِرج) ، وتأخذ الجسور السبعة الشكل التالي:

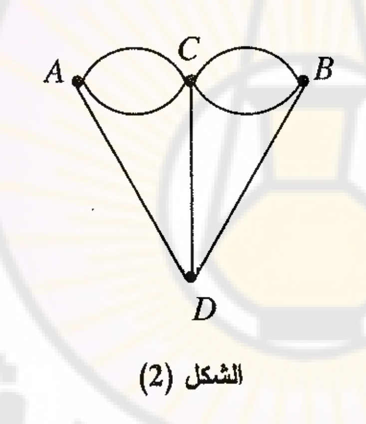


Königsberger Bridge problem



الشكل (1)

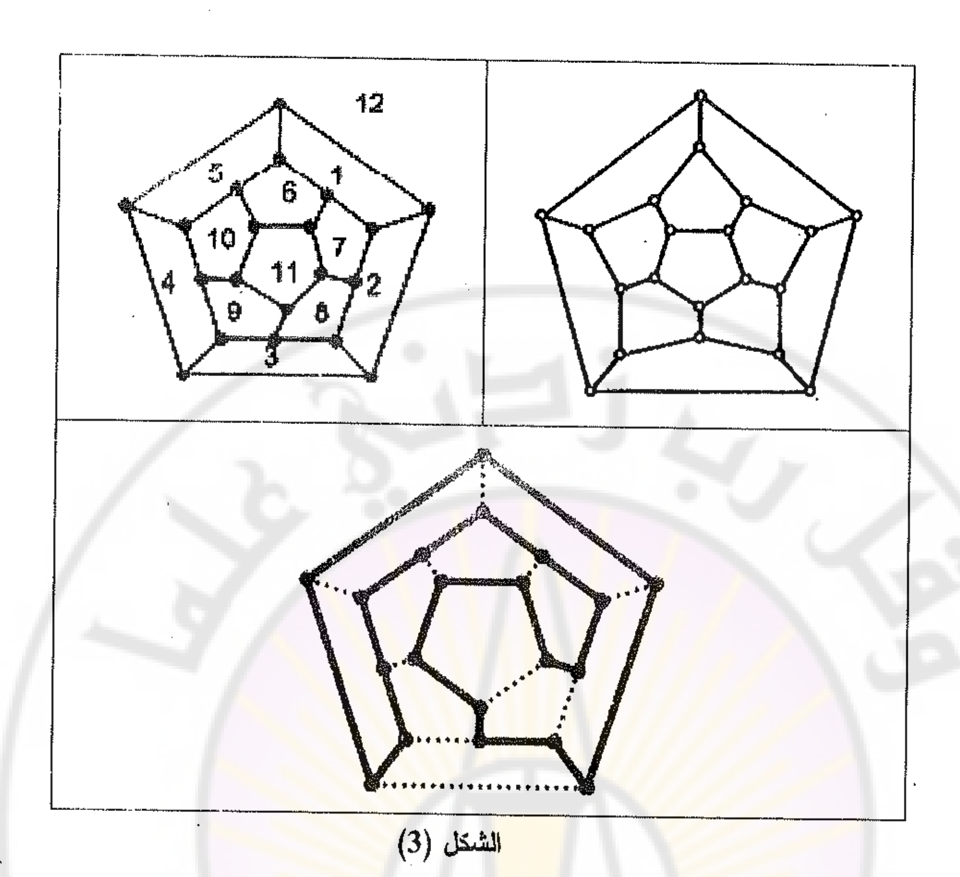
هل نستطيع التجوال على هذه الجسور السبع من دون أن نمر على أي جسر مرتين. رسم أيلر البيان الذي يمثل نموذج لهذه المسألة كما يأتي:



الشكل (2)

- **أحجية هاملتون**

نشر هاملتون مسألة التجوال في الصحف الرسمية الشعبية. هل يمكن التجوال في البيان المبين في الشكل (2) دون أن نمر على العقدة أكثر من مرة وتمثل كل عقدة إحدى مدن العالم الكبرى.

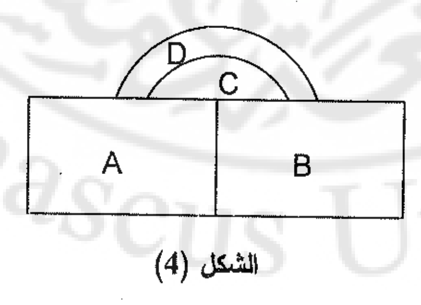


الشكل (3)

- **مسألة الألوان الأربعة**

كتب الأستاذ Augustus De Morgan الأستاذ في جامعة كوليكا في لندن للأستاذ هاملتون في 23 تشرين الأول عام 1852:

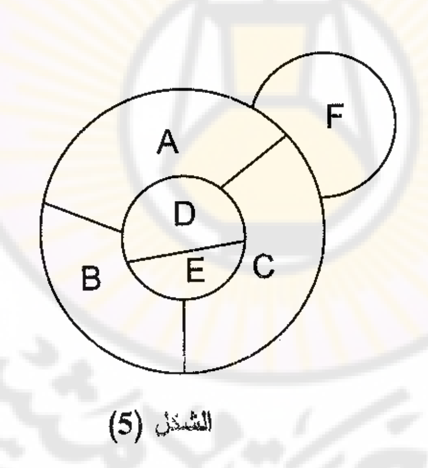
سألني أحد الطلاب اليوم، فيما إذا كان صحيحاً أن أي خارطة يمكن تلوينها على الأكثر بأربعة ألوان، بحيث تأخذ الدول المتجاورة ألوان مختلفة



الشكل (4)

أعطى ديموركان مثال يبين فيه توزيع الألوان الأربعة اللازمة " لقد بين ديموركان أنه لا يمكن أن توجد خمس دول بحيث تكون كل دولتين منهما متجاورتان"، ولكن هاملتون لم يهتم بهذه المسألة التي عرفت فيما بعد بمسألة الألوان الربعة.

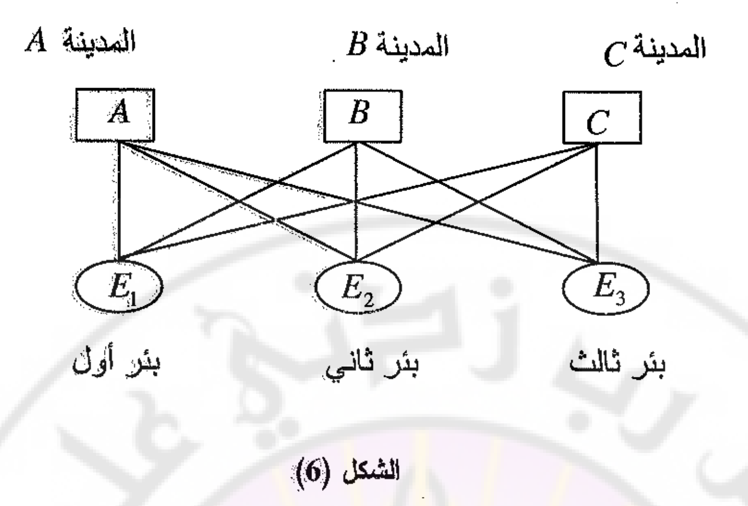
الطالب الذي سأل ديموركان هو فريدريك كوثري Frederick Gythrie وتبين فيما بعد أن أخيه فرنسيس Francis هو الذي طرح هذه المسألة. عرض كيلي Cagley هذه المسألة عام 1978 في أكاديمية الرياضيات في لندن وبعد مرور سنة على طرح هذه المسألة. قدم المحامي كيمب A . kempe عملاً يتضمن توضيح إيجابي وحل لهذه المسألة. كرّم كيمب A . kempe حيث انتخب رئيس للأكاديمية الرياضية في لندن ولكن في عام 1890 بين هاود heawood أن إثبات كيمب A . kempe خاطئ.



الشكل (5)

- **مسألة المدن الثلاث والآبار الثلاث**

لدينا ثلاث مدن ويراد سقاية كل مدينة من هذه المدن من الآبار الثلاثة. بحيث ألاّ تتقاطع القنوات مع بعضها. البيان الذي يمثل نموذج لهذه المسألة هو:



الشكل (6)

- **مسألة شبكات الهاتف**

يراد بناء شبكة هواتف بين عدة قرى ومدن بحيث يتحقق ما يلي:

أ- أي قريتين أو مدينتين أو قرية ومدينة يتصلان ببعضهما بشكل مباشر أو غير مباشر.

ب- أن تكون مراكز المقاسم في مراكز هذه المدن والقرى لتخفيف نفقات نقل الموظفين والصيانة.

ت- أن تكون كل شبكة ذات كلفة أصغريه.

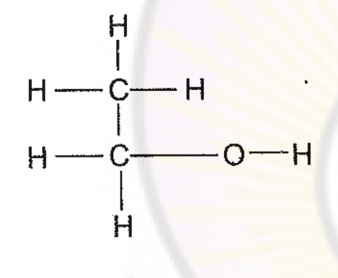
زاد الاهتمام بنظرية البيان في منتصف القرن العشرين، بسبب إمكان تطبيقها في مجالات متعددة. إن تطبيقات نظرية البيان في القرن الماضي شملت مجالات واسعة مثل علم الحاسوب، بحوث العمليات، الاقتصاد، الكيمياء، الهندسة الكهربائية وعلوم اللغة...الخ.

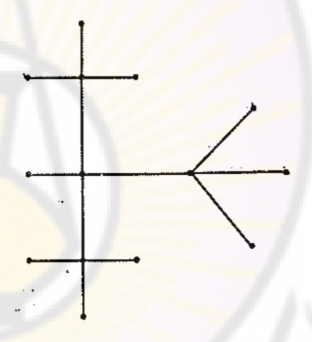
2-بعض تطبيقات نظرية البيان

- المركبات الكيميائية وتمثيلها البياني



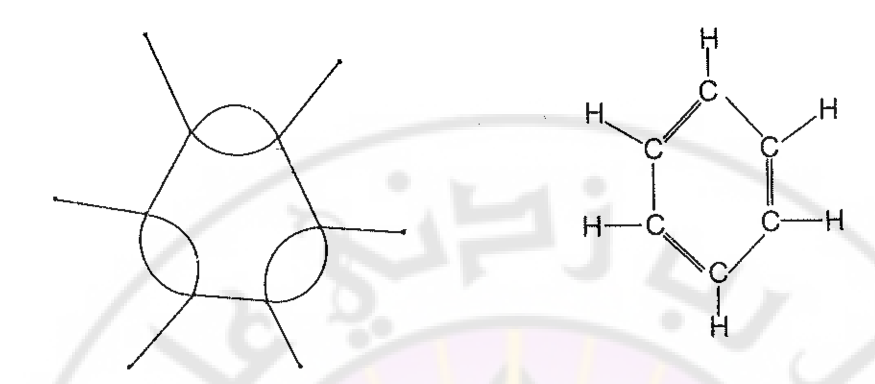
الشكل (7)





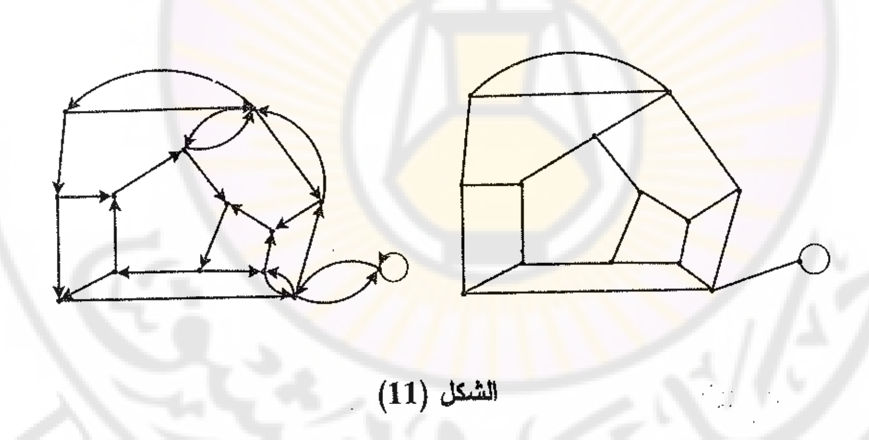
الشكل (8)

الشكل (9)



الشكل (10)

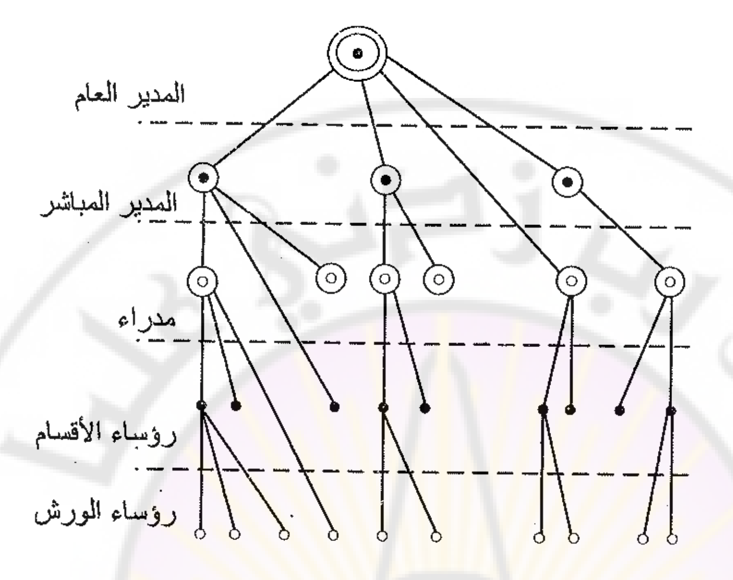
- **مخطط مدينة**



الشكل (11)

لا يهتمون المشاة باتجاه السير بينما السائقين يجب أن يعلموا باتجاهات المرور المسموح به.

- مخطط إدارة الأعمال في معمل كبير

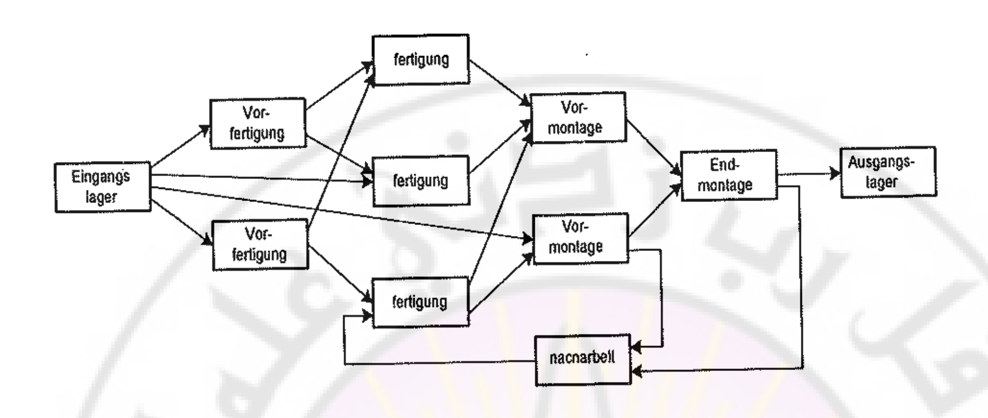




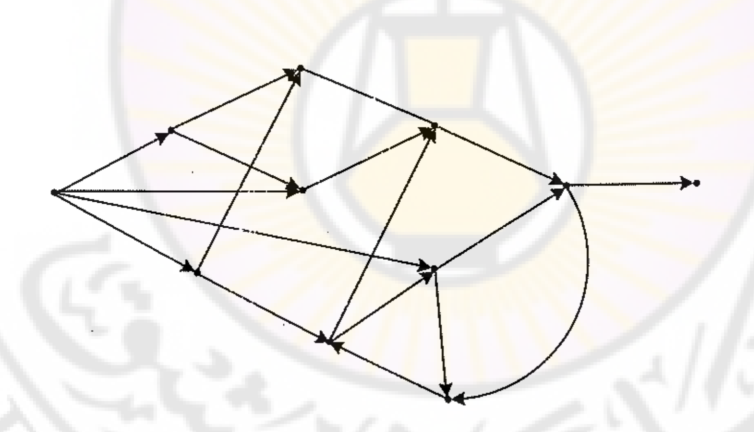
البيان المثل لمخطط إدارة الأعمال في المعمل.

الشكل (12)

– سير الإنتاج في المعمل



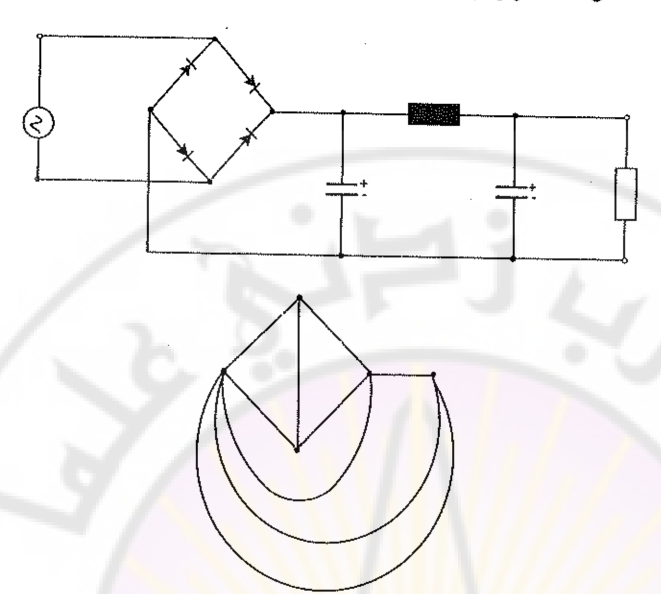
الشكل (13)



البيان الممثل لسير الإنتاج في معمل

الشكل (14)

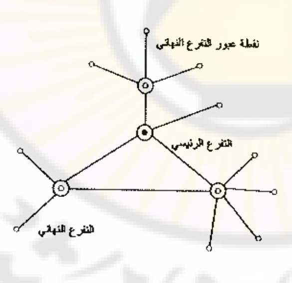
- مخطط دارة الكترونية

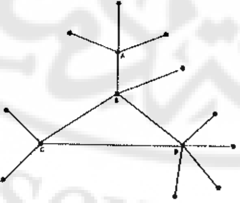


بيان الممثل لهذه الدارة

الشكل (15)

- تمثيل التفرع





بيان الممثل

الشكل (16)

3-تعاريف ومفاهيم أساسية

تعريف:

لتكن V مجموعة عقد غير خالية ولتكن E مجموعة أضلاع غير خالية. ولتكن لدينا الدالة:

$$f : E \to V * V$$
$$f(e) = (x, y) : x, y \in V$$

نسمي الثنائية المرتبة $G = (V; E)$ بياناً. ونسمي V مجموعة عقد البيان G ونسمي E مجموعة أضلاع البيان G.

تعريف:

نقول إن البيان $G = (V; E)$ بيان منته إذا كانت كل من المجموعتين V و E مجموعة منتهية.

تعريف:

البيان الخالي وهو بيان لا يحوي عقد ولا يحوي أضلاع ويرمز له بـــ $G(V; E) = \phi$.

ملاحظة:

يمكن للبيان أن يحوي عقداً ولا يحوي أضلاع ولكن لا يوجد بيان لا يملك عقد و يملك أضلاع.

تعريف:

نقول عن العقدتين x و y من مجموعة العقد V إنهما متجاورتين إذا وجد ضلع e ينتمي إلى مجموعة الأضلاع E يربط بين x و y أي:

$x, y \in V$ حيث y تجاور العقدة x العقدة $\Leftrightarrow \exists e \in E \ : \ e = (x, y)$

تعريف:

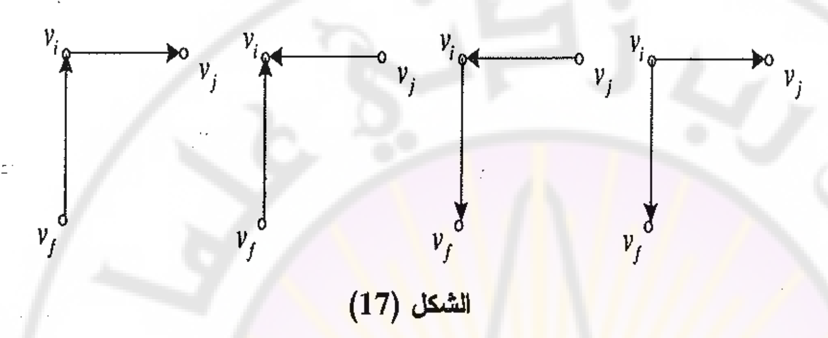
القوس (Arc) هو ضلع e مزود باتجاه ونرمز له بـ $\vec{e}$.

تعريف:

نقول عن ضلعين أنهما متجاورتين إذا اشتركا بعقدة.

تعريف:

القوسان المتجاورين هما قوسين يشتركان بعقدة وفق الحالات التالية:



الشكل (17)

ملاحظة:

سنفرض أن البيانات التي نعالجها هي بيانات منتهية.

تعريف:

إذا كان $v = f(e)$ فإننا نسمي v طرفاً للضلع e كما نقول أن الضلع e يؤثر على العقدة v.

تعريف:

تكون العقدة $x \in V$ مجاوره لنفسها إذا وجد ضلع (عروه) $e \in E$ بحيث $e = (x, x)$.

تعريف:

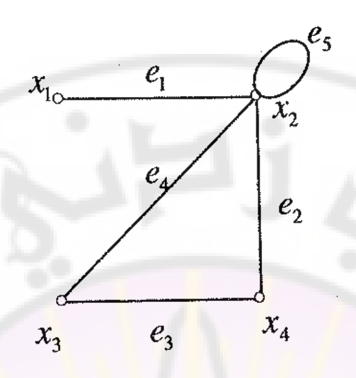
نقول عن الضلعين $e_1, e_2 \in E$ متجاورين إذا وجدت عقدة مشتركة $x \in V$ بين الضلعين e_1 و e_2.

تعريف:

العروة هي ضلع فيه عقدة البداية نفس عقدة النهاية أي $e = (x, x)$ و نسمي

الضلع e عروة عند العقدة x.

مثال:



الضلع e_5 هو عروة.

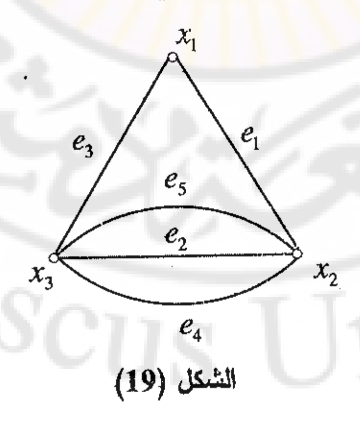
الشكل (18)

تعريف:

إذا كان $e_1 = e_2 = (x, y)$ بحيث $x \neq y$ عندئذ نسمي كلاً من e_1 و e_2 ضلع مضاعف، أما إذا كان $e_1 = e_2 = (x, y)$ أما إذا كان $x = y$ عندئذ نسمي كلاً من العروة e_1 والعروة e_2 عروة مضاعفة عند العقدة x .

مثال:

الشكل التالي يبين الأضلاع المضاعفة في البيان

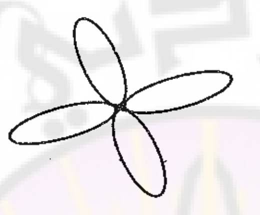


الشكل (19)

أن كل من الأضلاع e_4, e_2, e_5 هي أضلاع مضاعفة أو أضلاع متوازية.

تعريف:

الباقة (Bouquet) هي بيان مؤلف من عقدة واحدة حولها n عروة ويرمز لها B_n.



B_4

الشكل (20)

تعريف:

نسمي البيان $G=(V;E)$ بيان بسيط إذا كان البيان G لا يملك أضلاع مضاعفة ولا يملك على عرى.

تعريف:

إذا كان $G=(V;E)$ بيانا بسيطا وكانت العقدة $x\in V$ فإننا نعرف قدرة العقدة x على أنها عدد الأضلاع من البيان G المؤثرة في العقدة x مع الملاحظة أن العروة تؤثر على العقدة مرتين.

نرمز لقدرة العقدة x بالرمز $\deg(x)$ ونلاحظ أن:

$$\deg(x)=\left|(e:e=(x,y)\forall y\in V\wedge x\neq y))\right|+2\left|(e:e=(x,x)\right|$$

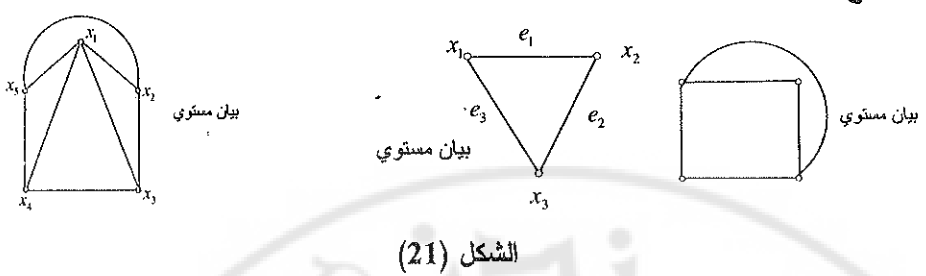
تعريف:

نسمي العقدة x عقدة معزولة إذا لم يؤثر فيها أي ضلع من البيان G ، أي إذا كانت قدرة العقدة $\deg(x)=0$.

تعريف:

البيان المستوي هو بيان يمكن رسمه على سطح مستوي أو سطح كرة دون

أن تتقاطع أضلاعه.

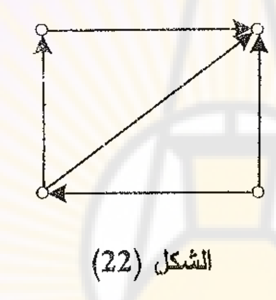


الشكل (21)

تعريف:

البيان الموجه هو بيان زودت أضلاعه باتجاه ويرمز للبيان الموجه بالرمز: $\vec{G} = (V; \vec{E})$.

مثال:

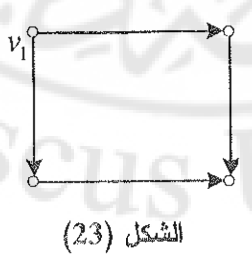


الشكل (22)

تعريف عقدة المصدر(أو المنبع):

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G} = (V; \vec{E})$ ولتكن v_i عقدة من مجموعة العقد V. نسمي العقدة v_i أنها عقدة مصدر إذا وفقط إذا كانت هذه العقدة عقدة بداية لجميع الأقواس المؤثرة فيها (عقدة منبع)

مثال:



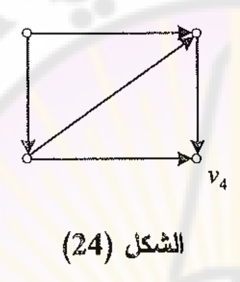
الشكل (23)

عقدة المصدر هي v_1 (جميع الأقواس المؤثرة في العقدة v_1 صادرة عنها).

تعريف عقدة الهدف (أو المصب):

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}(V;\vec{E})$ ولتكن العقدة v_4 عقدة من مجموعة العقد V نقول عن العقدة v_4 إنها عقدة هدف (أو مصب) إذا كانت فقط عقدة نهاية لجميع الأقواس المؤثرة فيها.

مثال:



الشكل (24)

عقدة الهدف هي v_4 (جميع الأقواس المؤثرة في العقدة v_4تصل إليها).

تعريف:

الدائرة هي متتالية من الأضلاع فيها عقدة البداية نفس عقدة النهاية وباقي العقد لا تتكرر.

تعريف:

الشبكة هي بيان موجة لا يحوي دائرة.

تعريف:

الدائرة الزوجية هي دائرة عدد أضلاعها عدد زوجي.

ونكتب ما يلي:

ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ ولتكن الدائرة C، محتواة في هذا البيان : $C\subseteq G=(V;E)$

$$C = < v_1 , (v_1 , v_2) , v_2 , (v_2 , v_3) , ..., (v_n , v_1) , v_1 >$$

وإذا لم يكن هناك التباس يمكن أن نكتب ما يلي:

$$C = < v_1 , v_2 , v_3 , ..., v_n , v_1 >$$

تعريف:

الدائرة الفردية هي دائرة يكون عدد أضلاعها عدداً فردياً.

تعريف:

البيان الموزون هو بيان بسيط موجة أو غير موجة أو مختلط زوّدت أضلاعه أو أقواسه بقيم ما.

4-تمثيل البيان

لوصف البيان بشكل ملموس نمثل البيان وفق ما يلي: نمثل كل عقدة بدائرة صغيرة ونمثل كل ضلع $e = (x, y)$ بخط مستقيم (ليس بالضرورة مستقيماً) يربط بين العقدة x والعقدة y . فيما يلي نبين كيفية تمثيل البيان.

مثال:

ليكن $G = (V; E)$ بياناً معرفاً كما يلي $V = \{x, y, z, t, s\}$ ، $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ معرف بوساطة الجدول الأتي:

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
(x,x)	(x,y)	(x,z)	(x,z)	(y,z)	(z,t)

جدول (1)

أ- أوجد تمثيلاً للبيان G.

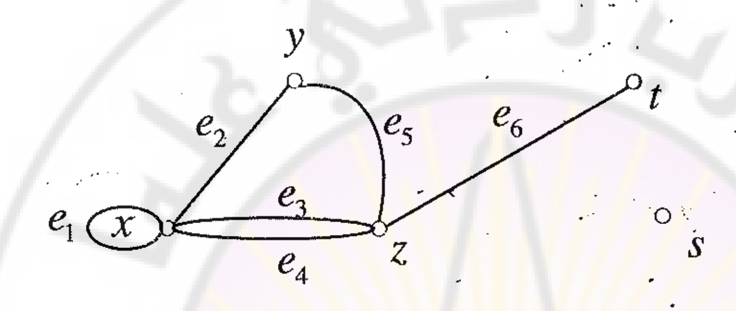
ب-أوجد قدرة عقد G والعقد المعزولة.

ت- أوجد الأضلاع المضاعفة والعرى.

ث- هل البيان G بيان بسيط ؟

الحل:

(أ):



الشكل (25)

(ب): نبين قدرة العقد بوساطة الجدول (2):

v	x	y	z	t	s
$\deg(v)$	5	2	4	1	0

الجدول (2)

بما أن $\deg(s)=0$ فإن s عقدة معزولة (العقدة المعزول الوحيد في البيان G).

(ج) بما أن $e_3 = e_4 = (x,z)$ فإن كلاً من الضلعين e_3 و e_4 هو ضلع مضاعف ، وبما أن $e_1 = (x,x)$ فإن الضلع e_1 عروة.

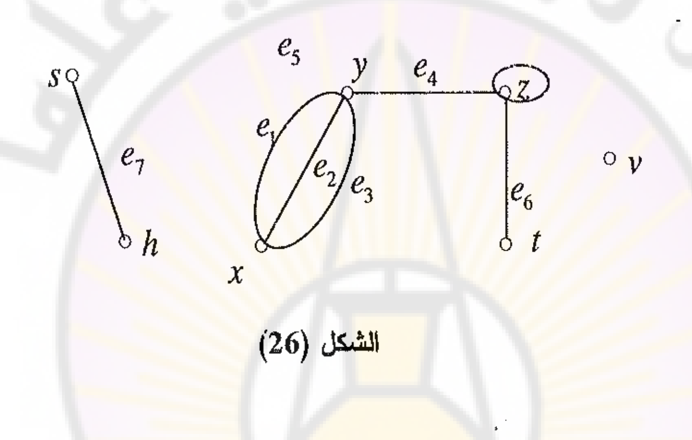
(د) إن البيان G ليس بياناً بسيطاً لأنه يحتوي أضلاع مضاعفة (أو لأنه يحتوي عروة).

تعريف:

نسمي مجموعة الأضلاع E بالمجموعة المضاعفة في حالة البيان غير البسيط وذلك لتضاعف بعض أضلاعه.

مثال:

إذا كان $G=(V;E)$ هو البيان المعطى في الشكل (26) فأوجد كلاً من E,V.



الشكل (26)

الحل:

واضح أن $V=\{x,y,z,t,s,h,v\}$ كذلك أن $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$

والجدول (3) يبين تمثيل البيان:

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
(x,y)	(x,y)	(x,y)	(y,z)	(z,z)	(z,t)	(s,h)

جدول (3)

ملاحظة:

توجد علاقة بين عدد أضلاع البيان وقدرات عقده. المبرهنة التالية تصف لنا

هذه العلاقة.

مبرهنة (1):

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بحيث أن $V=\{v_1,v_2,......,v_n\}$ عندئذ فإن:

$$\deg(v_1)+\deg(v_2)+\cdots+\deg(v_n)=\sum_{v_i\in V}\deg(v_i)=2|E|$$

البرهان:

نحسب عدد الأضلاع التي تؤثر في عقد البيان G بطريقتين مختلفتين:

أ- كل ضلع يؤثر على عقدتين وبالتالي فإن العدد المطلوب هو $2|E|$.

ب- كل عقدة v_i تتأثر بأضلاع البيان G مرة وبالتالي، فإن العدد المطلوب هو $\deg(v_1)+\deg(v_2)+\cdots+\deg(v_n)$. إذاً، فأن:

$$\deg(v_1)+\deg(v_2)+\cdots+\deg(v_n)=\sum_{v_i\in V}\deg(v_i)=2|E|$$

تعريف:

نسمي العقدة x عقدة فردية إذا كان قدرة العقدة $\deg(x)$ عدداً فردياً، ونسمي العقدة y عقدة زوجية إذا كان قدرة العقدة $\deg(y)$ عدداً زوجياً.

تمهيدية:

إذا كان لدينا مجموعة من الأعداد الفردية التي مجموعها عدد زوجي فإن عدد هذه الأعداد يكون زوجياً.

مبرهنة (2):

إذا كان $G=(V;E)$ بياناً فإن عدد العقد الفردية في البيان G هو عدد زوجي.

البرهان:

لتكن $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$ مجموعة عقد البيان G. ولتكن V_1 هي مجموعة العقد الفردية في البيان G. ولتكن V_2 هي مجموعة العقد الزوجية في البيان G. إذاً $V=V_1\cup V_2$ و $V_1\cap V_2=\phi$.

بما أن $\sum_{x\in V}\deg(x)=2|E|$ فإن $\sum_{x\in V_1}\deg(x)+\sum_{x\in V_2}\deg(x)=2|E|$. إن العدد $\sum_{x\in V_2}\deg(x)$ هو عدد زوجي، كذلك، فإن العدد $2|E|$ هو عدد زوجي. إذاً العدد $\sum_{x\in V_1}\deg(x)$ هو عدد زوجي وبالتالي، فإن العدد $|V_1|$ هو عدد زوجي.

(حسب التمهيدية فإن عدد هذه العقد التي قدراتها أعداد فردية عدد زوجي)

مثال:

هل يوجد بيان قدرات عقده هي الأعداد 7,5,2,4,7 ؟

الحل:

بما أن $7+5+2+4+7=25$ عدد فردي فإنه لا يوجد بيان يحقق المطلوب (أو 7,5,7 هي القدرات الفردية المعطاة في المسألة. بما أن عدد هذه القدرات فردي فإنه لا يوجد بيان يحقق الشرط المطلوب).

5-مصفوفات البيان

مصفوفة التأثير:

ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ حيث مجموعة العقد هي $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ ومجموعة الأضلاع هي $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$. نعرف مصفوفة التأثير للبيان G بأنها المصفوفة $B=[b_{ij}]$ من البعد $n\times m$ حيث:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, x_i \text{ يؤثر على } e_j \\ 0, x_i \text{ لا يؤثر على } e_j \end{cases}$$

خواص مصفوفة التأثير :

1- يوجد تطبيق متباين بين مجموعة البيانات التي تملك n عقدة و m ضلع وبين مجموعة المصفوفات الثنائية التي تحوي في كل عمود من أعمدتها عنصرين فقط غير معدومين وبقية عناصر العمود معدومة.

2- السطر الذي جميع عناصره أصفار يقابل عقدة معزولة.

3- باقي قسمة مجموع عناصر أي سطر على 2 يساوي باقي قسمة مجموع عناصر بقية الأسطر على 2 ، إن ذلك يعني أن :

$$\sum_{j} b_{ij} (\text{mod})2 = \alpha \Rightarrow \sum_{i \neq j} \sum_{j} b_{ij} (\text{mod})2 = \alpha$$

4- مجموع عناصر أي سطر يمثل قدرة العقدة المقابلة لهذا السطر.

5- السطر الذي يحوي قيمة واحدة فقط غير معدومة يقابل عقدة معلّقة .

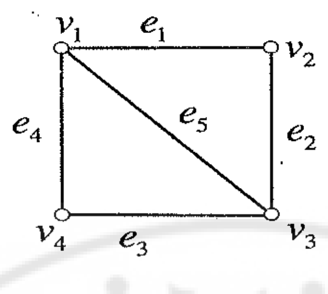
6- التبديل بين أي سطرين يعني التبديل بين ترقيم العقدتين .

7- التبديل بين أ ي عمودين يعني التبديل بين ترقيم الضلعين الموافقين.

8- الشرط اللازم والكافي لكي يكون بيانين متشاكلين هو أن تنتج مصفوفة التأثير لإحداهما عن مصفوفة التأثير للآخر بإجراء عمليات جبرية على هذه المصفوفة .

مثال :

اكتب مصفوفة التأثير للبيان المبين بالشكل التالي :



الشكل (27)

$$\Rightarrow B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} ....e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

إن باقي قسمة مجموع عناصر أي سطر على 2 يساوي وباقي قسمة مجموع عناصر بقية الأسطر على 2.

- مجموع عناصر السطر الأول هو:

$$0+0+1+1+1 = 3$$

إذا : $3 \bmod 2 = (1)$

- مجموع بقية عناصر المصفوفة هو: 7

إذا : $7 \bmod 2 = (1)$

نحصل صحة الخاصة من أجل أي سطر نختاره.

ملاحظة :

- إذا كان البيان مترابط وبسيط فإن رتبة (rank) مصفوفة التـأثير = n-1 حيث أن n عدد عقد البيان.

- إذا كان البيان مكون من k مركبة فإن رتبة مصفوفة التأثير هـي عبـارة عـن : n-k حيث أن n هو عدد عقد البيان و k عدد مركبات البيان .
- إن المصفوفة B_r الناتجة عن مصفوفة التأثير بحذف أحد أسطرها (أي أحد أسطر المصفوفة B) فإن أسطر المصفوفة B_r تكون مستقلة خطياً.

ملاحظة :

إذا كان البيان $G=(V;E)$ هو شجرة فإن المصفوفة B_r هي مربعة من المرتبة n-1

ملاحظة:

- مصفوفة التأثير Incidence Matrix لبيان غير بسـيط $G=(V;E)$ هـي المصفوفة B_G التي اسطرها مرقمة حسب العقد وأعمدتها مرقمة حسب الأضلاع بحيث :

$$B_G[v,e]=\begin{cases} 0 & \text{إذا كانت } v \text{ ليس طرفاً لـ } e \\ 1 & \text{إذا كانت } v \text{ طرفاً لـ } e \\ 2 & \text{إذا كانت } e \text{ عروة حول } v \end{cases}$$

- مصفوفة التأثير Incidence Matrix لبيان موجه $\vec{G}=(V;\vec{E})$ هي مصفوفة لسطرها أدلة حسب عقد البيان ولأعمدتها أدلة حسب أقواسه بحيث

$$B_D[v,e]=\begin{cases} 0 & \text{إذا لم تكن } v \text{ طرفاً لـ } e \\ 1 & \text{إذا كانت } v \text{ عقدة مصدر لـ } e \\ -1 & \text{إذا كانت } v \text{ عقدة هدف لـ } e \\ 2 & \text{إذا كانت } e \text{ عروة حول } v \end{cases}$$

مصفوفة التجاور:

ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ حيث مجموعة العقد $V=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. نعرف مصفوفة التجاور للبيان $G=(V;E)$ بأنها المصفوفة $A=[a_{ij}]$ من البعد $n\times n$ حيث:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, (x_i,x_j)\in E\\ 0, (x_i,x_j)\notin E\end{cases}$$

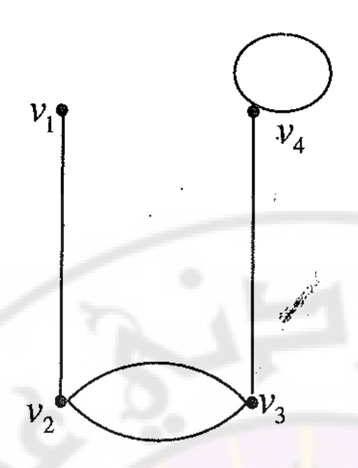
ملاحظة:

مصفوفة التجاور لبيان غير بسيط $G=(V;E)$ هي المصفوفة $A=[a_{ij}]$ التي اسطرها وأعمدتها مرقمة حسب العقد أي :

$$a_{ij}\begin{cases} 0 & ,(x_i,x_j)\notin E \\ 1 & ,(x_i,x_j)\in E \\ 2 & ,i=j:(x_i,x_i)\in E \end{cases}$$

مثال:

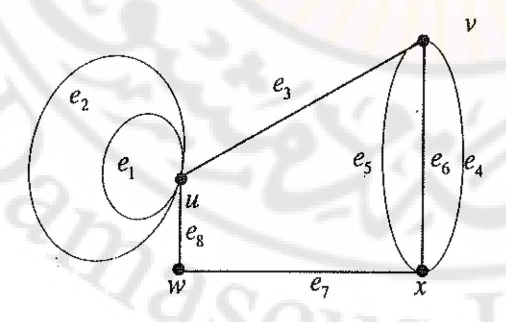
أوجد مصفوفة التجاور للبيان الأتي:



الشكل (28)

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\
\hline
v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
v_2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\
v_3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
v_4 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}
$$

مثال:



الشكل (29)

$$I_G = \begin{bmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ u & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

el

$$A_G = \begin{matrix} \\ u \\ v \\ w \\ x \end{matrix} \begin{bmatrix} u & v & w & x \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة القدرة:

مصفوفة القدرة هي مصفوفة تمثل قدرات العقد في البيان (أي أنها مصفوفة تمثل عدد الأضلاع المؤثرة في كل عقدة في البيان).

وسنرمز لها بالرمز : $D = (d_{ij})_{\substack{i=1:n \\ j=1:n}}$

$d(v_i)$ تعني قدرة العقدة v_i:

$$d_{ij} = \begin{Bmatrix} \deg(v_i), if, i = j \\ 0, otherwese \end{Bmatrix}$$

مصفوفة القدرة في البيان السابق هي:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

(columns: v_1 v_2 v_3 v_4)

وإن مصفوفة القدرة مصفوفة قطرية ويتضح ذلك من خلال تعريف d_{ij} أي أنه $\deg(v_i)$ في حال $i = j$ وصفر في حال $i \neq j$.

مصفوفة الإدخال:

إن مصفوفة الإدخال هي مصفوفة تنتج من حاصل طرح مصفوفة التجاور من مصفوفة القدرة ونرمز لها بالرمز: $Q = (q_{ij})_{\substack{i=1:n \\ j=1:n}}$

وتعرف بالشكل التالي: $q_{ij} = d_{ij} - a_{ij}$

مصفوفة الإدخال في المثال البيان السابق هي :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

لهذه المصفوفة تطبيقات عدة.

ملاحظة:

إن قيمة المحدد للمصفوفة الناتجة من حذف سطر وعمود من مصفوفة الإدخال لهما نفس الدليل ثابتة.

مصفوفة التجاور في البيان الموجه:

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G} = (V; \vec{E})$، فإن مصفوفة التجاور للبيان $\vec{G} = (V; \vec{E})$ هي المصفوفة $A(\vec{G}) = (a_{ij})_{\substack{i=1:n \\ j=1:n}}$ حيث تعرف عناصرها كما يلي:

$$A(\vec{G}) = (a_{ij})_{\substack{i=1:n \\ j=1:n}} \quad , \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{......,....} if \; \exists \vec{e}_j = [v_i, v_j] \\ -1 \text{....,....} if \; \exists \vec{e}_j = [v_j, v_i] \\ 0 \text{.......,.....} otherwes \end{cases}$$

ملاحظة:

في البيان غير الموجه ليس هناك فرق بين الضلع الذي يربط بين العقدتين v_i و v_j .

ملاحظة:

ليكن لينا البيان الموجة $\vec{G}=(V;\vec{E})$ حيث القوس $\vec{e}=[v_i,v_j]$ يربط بين العقدتين v_i و v_j والقوس $\vec{e}'=[v_j,v_i]$ يربط بين v_j و v_i، فإن $\vec{e}\neq\vec{e}'$

أي: $\vec{e}=[v_i,v_j]\neq[v_j,v_i]=\vec{e}'$.

مصفوفة التأثير في البيان الموجه:

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}=(V;\vec{E})$، فإن مصفوفة التأثير للبيان $\vec{G}=(V;\vec{E})$ هي المصفوفة $B(\vec{G})=(b_{ij})_{\substack{i=1:n\\ j=1:m}}$ حيث تعرف عناصرها كما يلي:

$$B(\vec{G})=(b_{ij})_{\substack{i=1:n\\ j=1:m}} \quad , \quad b_{ij}=\begin{cases}1.......,....if\ \exists e=[v_i,v_j]\\ -1....,....if\ \exists e=[v_j,v_i]\\ 0.......,......otherwes\end{cases}$$

تمارين

1- ليكن $G=(V;E)$ بيانا بسيطاً والعلاقة R معرفة على مجموعة العقد V كالتالي:

xRy إذا وفقط إذا كان $(x,y)\in E$ أثبت أن العلاقة R غير انعكاسية وتناظرية.

2- ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ حيث عدد عقدة $|V|=n$ فأثبت أن

$$|E|\leq\frac{n(n-1)}{2}$$

3- ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بياناً معرفاً كما يلي:

لتكن المجموعة $V=\{x,y,z\}$ مجموعة العقد و لتكن المجموعة $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ مجموعة الأضلاع بحيث يكون:

e_1	e_2	e_3	e_4
(x,y)	(x,y)	(x,y)	(y,z)

أ- أوجد تمثيلاً للبيان G.

ب- أوجد قدرات عقد البيان G.

ت- أوجد الأضلاع المضاعفة والعرى.

ث- هل البيان G بيان بسيط ؟ لماذا ؟

4- ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بياناً معرفاً كما يأتي:

لتكن المجموعة $V=\{x,y,z,t,s\}$ مجموعة العقد و لتكن المجموعة $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ مجموعة الأضلاع بحيث يكون:

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
(y,y)	(z,t)	(z,t)	(y,z)	(x,y)

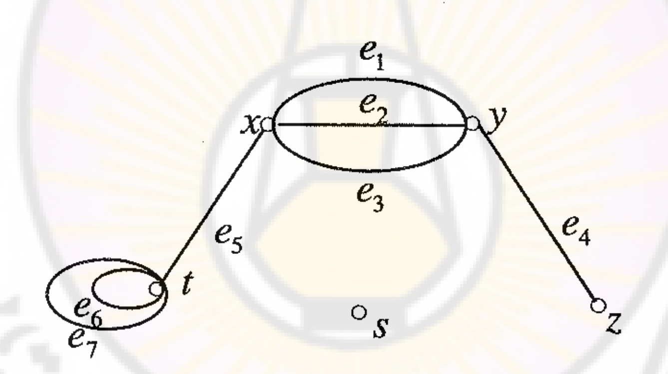
أ- أوجد تمثيلاً للبيان G.

ب- أوجد قدرات عقد البيان G والعقد المعزولة.

ت- أوجد الأضلاع المضاعفة والعرى.

ث- هل البيان G بيان بسيط ؟ لماذا ؟

5- أوجد مجموعة العقد V ومجموعة الأضلاع E حيث أن البيان $G=(V;E)$ قد تم تمثيله بالشكل التالي:



6- هل يوجد بيان بحيث تكون جميع قدرات عقده هي:

أ- 7,5,3,2,2,1

ب- 3,7,5,3

7- أعط مثالاً على بيان بسيط بحيث:

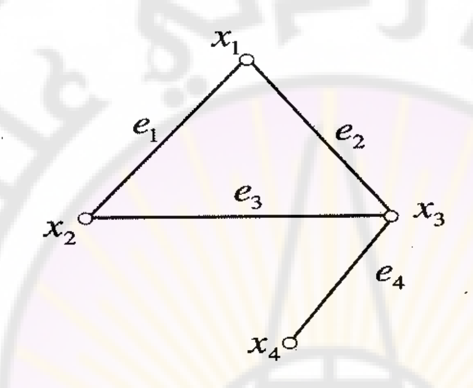
أ- جميع العقد زوجية

ب- جميع العقد فردية.

8- ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بحيث يكون مجموع قدرات عقده هو 48. أوجد عدد أضلاعه.

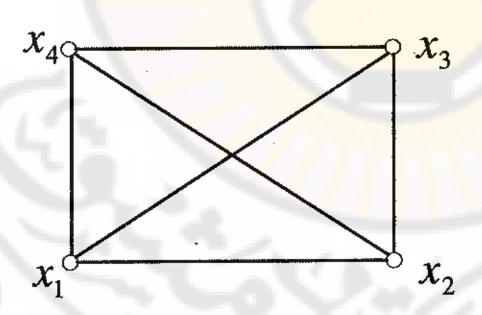
9- أوجد بياناً بسيطاً عدد عقده 10 حيث تكون 6 من هذه العقد زوجية والعقد الأخرى فردية.

10- أوجد مصفوفة التأثير للبيان المعطى في الشكل الأتي:



-11

12- أوجد مصفوفة التجاور للبيان المعطى في الشكل الأتي:



13- إذا كانت المصفوفة $B=[b_{ij}]$ مصفوفة التأثير للبيان $G=(V;E)$ حيث يحتوي الصف i على عدد j من الأعداد 1 فأثبت أن $\deg(x_i)=j$.

14- أثبت أن القطر الرئيسي لمصفوفة التجاور لأي بيان بسيط يتكون من أصفار.

15- أثبت أنه لا يوجد بيان بسيط حيث جميع قدرات عقده هي 5,2,1,1,1

16- أثبت أنه إذا كان $G=(V;E)$ بياناً بسيطاً حيث عدد عقدة $2 \geq |V|$. فإنه يوجد:

17- $x,y \in V$, $x \neq y$ و $\deg(x)=\deg(y)$

18- إذا كانت A هي مصفوفة التجاور لبيان بسيط فأثبت أن المصفوفة A متناظرة (أي أن $A=A^T$).

19- هل يوجد بيان بسيط حيث يحتوي على 10 عقد و 50 ضلعاً ؟



الفصل الثاني

البيانات الجزئية والبيانات المترابطة
subgraphs and connected graphs

1- تعاريف

ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ وليكن:

$M \subseteq E, \phi \neq W \subseteq V, e \in E, x \in V$.

تعريف:

إن البيان $H=(V^{'};E^{'})$ بياناً جزئياً من البيان G إذا كانت $V^{'} \subseteq V$ و $E^{'} \subseteq E$.

تعريف:

إن البيان $H=(V^{'};E^{'})$ بيان مولد للبيان G إذا كان H بياناً جزئياً من G وكانت $V^{'}=V$.

تعريف:

إن البيان $H=(W;F)$ هو البيان الجزئي المولد بوساطة المسار W في G إذا كانت (e يربط بين عنصرين من $e: e \in E, W$) $=F$

تعريف:

إن $H=(U;M)$ هو البيان الجزئي المولد بوساطة مجموعة العقد M في G إذا كانت (v طرف لعنصر ينتمي إلى $v: v \in V, M$) $=U$.

تعريف:

نحصل على البيان الجزئي $G-\{v\}$ من البيان G بإجراء ما يلي:

أ- نحذف العقدة v من مجموعة العقد V.

ب- نحذف من مجموعة الأضلاع E كل ضلع المؤثرة على العقدة v.

تعميم:

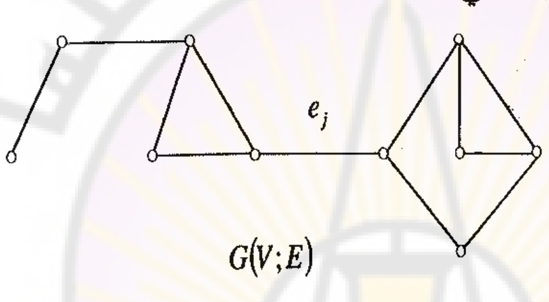
نحصل على البيان الجزئي $G-\{v_1,\dots,v_m\}$ من البيان G حيث نحذف مجموعة عقد $\{v_1,\dots,v_m\}$.

تعريف:

نحصل على البيان الجزئي $G-\{e\}$ من البيان G بعد حذف الضلع e.

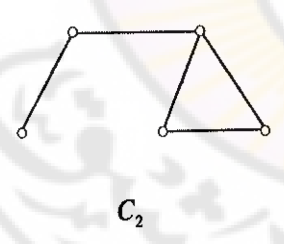
مثال:

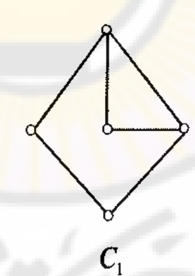
ليكن لدينا البيان التالي:



الشكل (1)

إذا حذفنا الضلع e_j نحصل على البيان التالي:





الشكل (2)

تعميم:

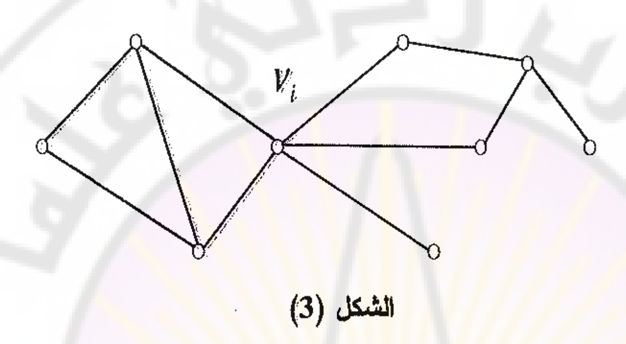
نحصل على البيان الجزئي $G-\{e_1,\dots,e_r\}$ من البيان G حيث نحذف

مجموعة الأضلاع $\{e_1,\dots,e_r\}$.

تعريف :

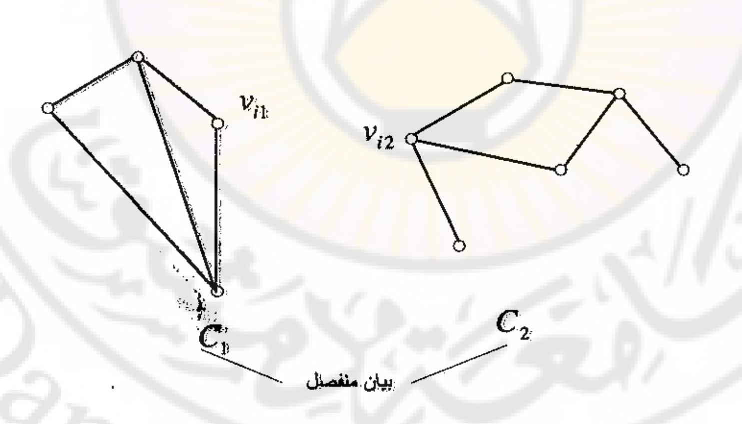
عقدة الفصل هي عقدة إذا قسمناها إلى عقدتين فإننا نحصل على بيان منفصل تماماً.

مثال:



الشكل (3)

إن v_i في هذا البيان هي عقدة الفصل حيث أننا إذا قسمناها إلى عقدتين نحصل على البيان التالي :



الشكل (4)

تعريف:

نقول عن بيان إنه بيان قابل للفصل إذا احتوى على عقدة فصل.

2-خوارزمية إيجاد البيان البسيط لبيان

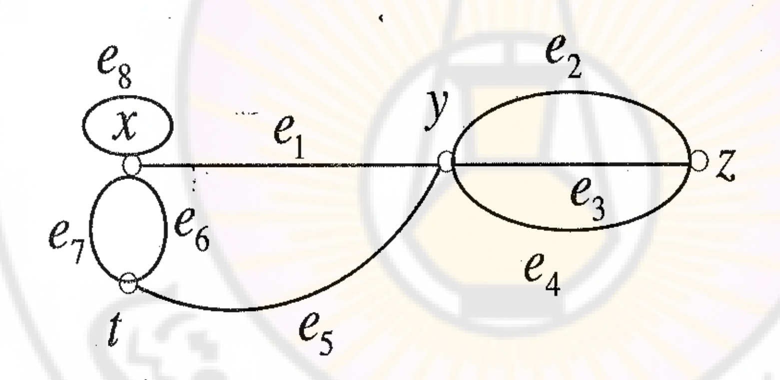
البيان البسيط G هو بيان جزئي مولد للبيان G ونحصل عليه من البيان G بإجراء الخطوات التالية:

الخطوة (1): نحذف جميع العرى الموجودة في G.

الخطوة (2): لكل $x,y \in V$ حيث $x \neq y$ نحذف جميع الأضلاع التي تصل بين y,x إلا واحداً.

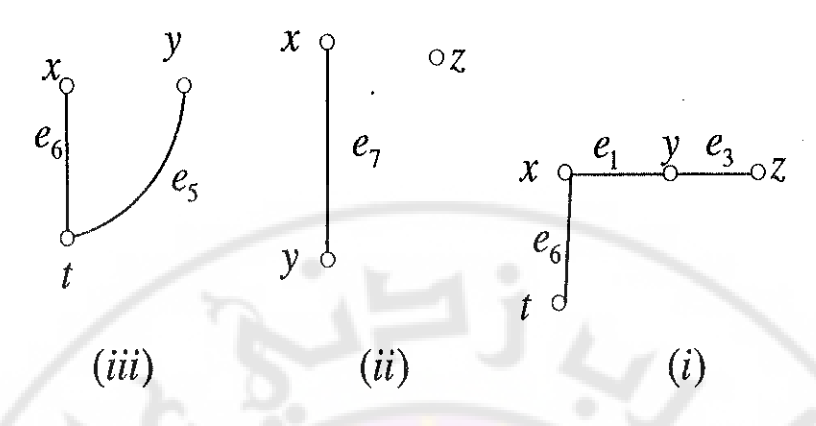
مثال :

ليكن لدينا البيان G هو البيان المعطى بالشكل (5):



الشكل (5)

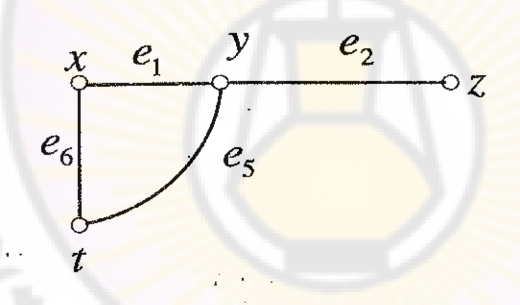
أ- كل بيان من البيانات التالية بيان جزئي من البيان G



الشكل (6)

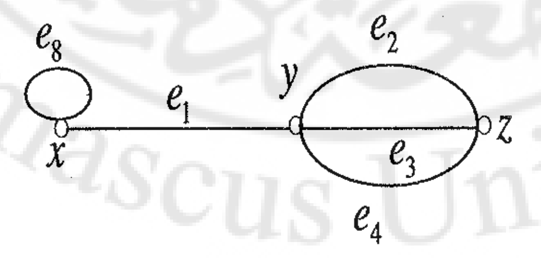
ب- البيان الجزئي المعطى في الحالة (i) من الفقرة (أ) بيان جزئي مولد للبيان G

ت- البيان الجزئي البسيط للبيان G:



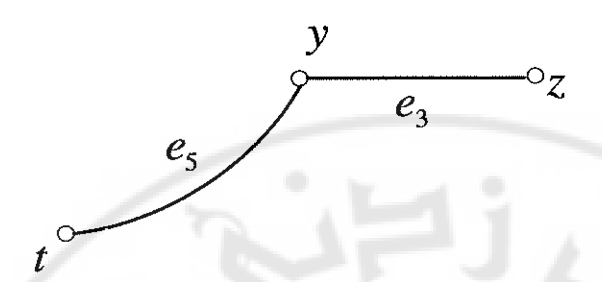
الشكل (7)

ث- البيان الجزئي المولد بوساطة مجموعة العقد $\{x, y, z\}$ هو:



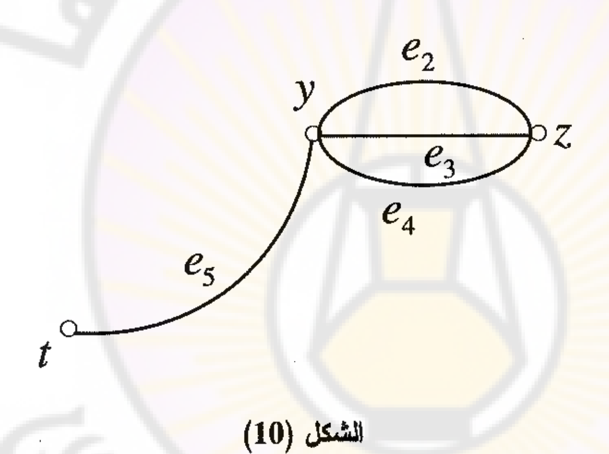
الشكل(8)

ج- البيان الجزئي المولد بوساطة مجموعة الأضلاع $\{e_3,e_5\}$ هو:



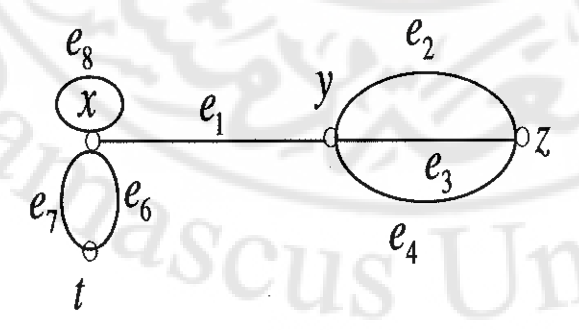
الشكل (9)

ح- البيان الجزئي $G-\{x\}$ هو:



الشكل (10)

خ- البيان الجزئي $G-\{e_5\}$ هو:



الشكل (11)

3-البيان المترابط

تعريف :

ليكن $G=(V;E)$ بياناً وليكن $x,y\in V$ حيث $x\neq y$. نقول أن العقدة x مرتبط بالعقدة y إذا وجد ممر من x إلى y.(الممر متتالية من العقد والأضلاع أي $v_1,e_1,v_2,\cdots,e_{n-1},v_n$ حيث $v_i\neq v_j$ من أجل $i\neq j$)

ملاحظة:

إذا كانت متتالية الأضلاع المباشرة للعقدة x دائرة طولها صفر، فإننا نقول إن العقدة x مرتبط بنفسها.

تعريف :

إن البيان G بيان مترابط إذا تحقق ما يلي:

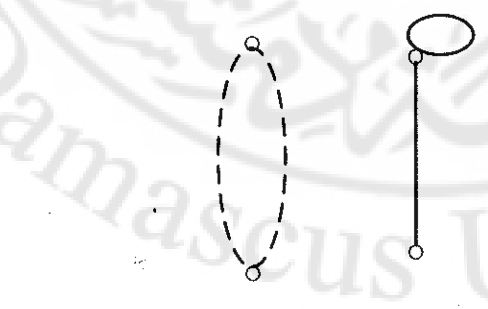
إذا كان من أجل أي عقدتين $\forall x,y\in V$ فإن العقدة x مرتبطة بالعقدة y بضلع أو متتالية أضلاع.

تعريف :

إن البيان G بيان غير مترابط إذا وجد عقدتين $v,u\in V$ بحيث تكون العقدة u غير مرتبطة بالعقدة v.

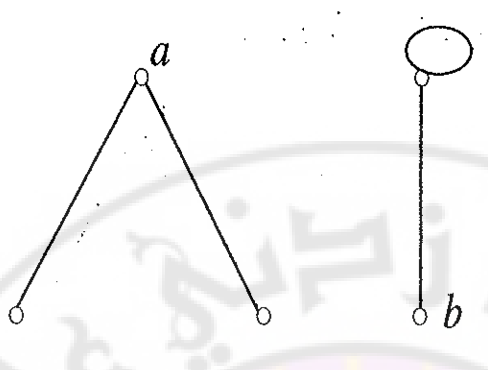
مثال:

(أ) البيان المعطى بالشكل (12) بيان غير مترابط



الشكل (12)

(ب) البيان المعطى بالشكل (13) بيان غير مترابط



الشكل (13)

تعريف:

نقول عن بيان $G=(V;E)$ أنه مترابط من الدرجة k ، إذا تحقق ما يلي:

إذا حذفنا منه k عقدة مختارة فإن البيان الناتج بيان غير مترابط

مبرهنة (1)

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$. نعرف العلاقة T على مجموعة العقد V كما يلي:

لكل عقدتين $\forall x,y\in V$، توجد العلاقة xTy إذا وفقط إذا كانت العقدة x مرتبط بالعقدة y بضلع أو متتالية أضلاع. عندئذ، إن العلاقة T علاقة تكافؤ على البيان G.

البرهان:

بما أن كل عقدة مرتبطة بنفسها فإن العلاقة T انعكاسية. إذا كان $x_1,e_1,\ldots,e_{n-1},x_n$ ممر من العقدة v_1 إلى العقدة v_2 فإن $x_n,e_{n-1},\ldots,e_1,x_1$ ممر من العقدة v_2 إلى العقدة v_1 وبالتالي فإن العلاقة T تناظرية. إذا كان $x_1,e_1,\ldots,e_{n-1},x_n$ ممر من العقدة v_1 إلى العقدة v_2 وكان $y_1,c_1,\ldots,c_{n-1},y_m$ ممر من العقدة v_2 إلى العقدة v_3 فإن $x_1,e_1,\ldots,e_{n-1},x_n=y_1,c_1,\ldots,c_{n-1},y_m$

ممر من العقدة v_1 إلى العقدة v_3 وبالتالي فإنه يوجد ممر من v_1 إلى v_3. إذاً العلاقة T متعدية، وبالتالي، فإن العلاقة T علاقة تكافؤ على البيان G.

تعريف:

ليكن لدينا البيان G معرف علية علاقة التكافؤ T المذكورة في المبرهنة (1). نفرض أن $V_1,\ldots,V_m$ هي صفوف التكافؤ. لكل $1 \le i \le m$ نرمز بالرمز C_i للبيان الجزئي مترابط المولد بوساطة مجموعة العقد V_i. نسمي C_i مركبة من البيان G.

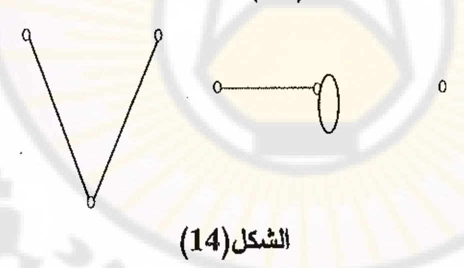
أن كل مركبة C_i تحقق ما يلي:

أ- C_i بيان مترابط

ب- إذا كان H بياناً جزئياً مترابطاً من G وكان C_i بياناً جزئياً من H فإن $H = C_i$ (أي عقد H هي عقد C_i وأضلاع H هي أضلاع C_i)

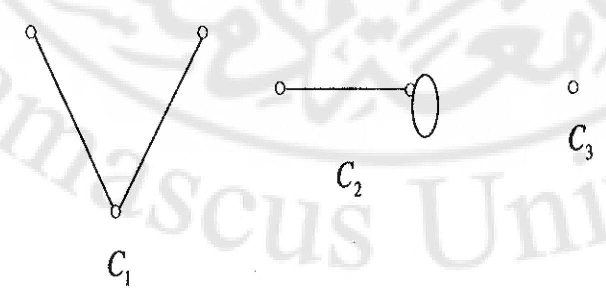
مثال:

ليكن G البيان المعطى بالشكل (14).

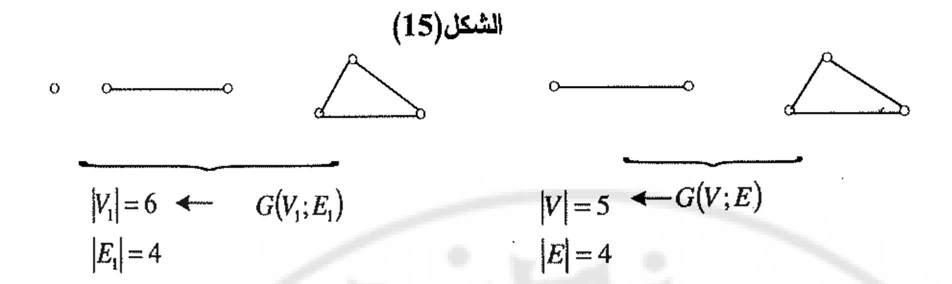


الشكل(14)

عندئذ، مركبات G هي:



الشكل(15)



الشكل(16)

مبرهنة (2)

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بيان مترابط عدد عقده $|V|=n$ عندئذ فإن عدد أضلاعه أكبر أو يساوي $|E|\geq n-1$ حيث n عدد صحيح يحقق $n\geq 1$.

البرهان:

نستخدم طريقة الاستقراء الرياضي على n.

من أجل $n=1$ فإن $n-1=1-1=0$ واضح أن عدد الأضلاع أكبر من أو يساوي الصفر. الآن نفرض أن المبرهنة صحيحة إذا كان البيان مترابطاً وعدد عقده أقل أو يساوي k. الآن، نفرض أن $G'=(V';E')$ بيان مترابط حيث $|V'|=k+1$. وليكن

$S=(m:m$ (يوجد بيان مترابط عدد عقده $k+1$ وعدد أضلاعه.

بما أن $|E'|\in S$ فإن $S\neq\phi$ وبالاستناد إلى مبدأ الترتيب. نجد أنه يوجد عدد أصغري t في S. إذن، يوجد بيان مترابط $G=(V;E)$ حيث $|V|=k+1,|E|=t$. نختار أي ضلع $e\in E$ ونعتبر البيان $((G-\{e\})=(V,E-\{e\}))$، من تعريف t ينتج أن $G-\{e\}$ بيان غير مترابط. وبما أن G مترابط فإننا نجد أن $G-\{e\}$ يتكون من مركبتين $C_1=(V_1;E_1)$ و$C_2=(V_2;E_2)$، إذاً $|E|=|E_1|+|E_2|+1$. بحسب الفرض

الاستقراء نجد أن:

$|E_1| \geq |V_1|-1$ و $|E_2| \geq |V_2|-1$ إذاً $|E_1|+|E_2| \geq |V_1|+|V_2|-2$

وبالتالي، فإن $|E_1|+|E_2|+1 \geq |V_1|+|V_2|-1$. إذاً $|E| \geq |V|-1$. ولكن من تعريف t، نجد أن $|E'| \geq |E| = t$. إذاً $|E| \geq |V|-1 = |V'|-1$.

تمهيدية:

إذا كانت $n_1, n_2, ..., n_k$ أعداد صحيحة موجبة من Z^+، أثبت صحة المتراجحة:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^{\,2} \leq (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - (k-1)*(2\sum_{i=1}^{k} n_i - k)$$

الحل:

إن n_i-1 هي n_1-1 أو n_2-1 أو n_3-1 .... أو n_k-1

لدينا:

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i-1) = (n_1-1)+(n_2+1)+.............(n_k-1)$$
$$= (n_1+n_2+.............+n_k)+(-1-1.............-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n_i-1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

بتربيع الطرفين :

$$[\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)]^2 = [\sum_{i=1}^{k} n_i - k]^2$$

$$[\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)]^2 = [\sum_{i=1}^{k} n_i]^2 - 2*k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2 ....(*)$$

إن الأعداد $(n_1-1),(n_2+1),.............,(n_k-1)$ جميعها أعداد صحيحة موجبة كون الأعداد : $n_1, n_2, ..., n_k$ هي من Z^+

إن :

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \qquad \text{.............} \quad (I)$$

عندئذ لدينا :

$$\left[(n_1-1)+(n_2-1)+..........+(n_k-1)\right]^2 = \sum_{i=1}^{k}(n_i)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

وبالاستفادة من (I) نجد:

$$\left[(n_1-1)+(n_2-1)+..........+(n_k-1)\right]^2$$

$$=(n_1-1)^2+(n_2-1)^2+..........(n_k-1)^2+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(n_i-1)(n_j-1)$$

بحيث $i \neq j$

$$\Rightarrow (n_1-1)^2+..........(n_k-1)^2+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(n_i-1)(n_j-1) = (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

حيث $i \neq j$ ، وبحذف الحد (الموجب) $2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(n_i-1)(n_j-1)$ من الطرف الأيسر للمساواة حيث $i \neq j$ نجد أن :

$$(n_1-1)^2+..........(n_k-1)^2 \le (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n_i-1)^2 \le (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(n_i^{\,2}-2n_i-1) \le (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i^{\,2} - 2\sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{i=1}^{k}(1) \le (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i^{\,2} \le (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - 2k\sum_{i=1}^{k} n_i + k^2 + 2\sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

$$= (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - 2(k-1)\sum_{i=1}^{k} n_i + k(k-1)$$

$$=(\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - (k-1)[2\sum_{i=1}^{k} n_i - k]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} {n_i}^2 \leq (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - (k-1)(2\sum_{i=1}^{k} n_i - k)$$

وهو المطلوب

مبرهنة(3)

ليكن $G=(V;E)$ بياناً بسيطاً فيه عدد عقدة $|V|=n$ ولنفرض أن هذا البيان مكون من k مركبة عندئذ فإن عدد أضلاع هذا البيان:

$$|E| \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

البرهان :

نميز حالتين :

الحالة الأولى: إذا كان $k=1$ (أي أن البيان $G=(V;E)$ مكون من مركبة واحدة) وكون البيان بسيط فإن عدد أضلاع هذا البيان هي على الأكثر $\frac{n(n-1)}{2}$ أي أن $|E| \leq \frac{n(n-1)}{2}$

وإذا عوضنا $k=1$ في المتراجحة $|E| \leq \frac{1}{2}(n-1).(n-k+1)$ نجد:

$$|E| \leq \frac{1}{2}(n-1).(n-1+1) = \frac{1}{2}(n-1).n$$

$$\Rightarrow |E| \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

إذاً المتراجحة صحيحة.

الحالة الثانية: إذا كان $k>1$ أي أن البيان مكون من أكثر من مركبة ، ولنأخذ المركبة i حيث $1 \leq i \leq k$ ولتكن V_i مجموعة عقد هذه المركبة و E_i مجموعة أضلاعها.

وليكن عدد العقد في V_i هو n_i فإنه نجد أن : $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

وإذا نظرنا لكل مركبة على أنها بيان فإن عدد الأضلاع في المركبة i سيكون:

$$|E_i| \le \frac{1}{2} n_i.(n_i - 1)$$

إذاً

$$\sum_{i=1}^{k} |E_i| \le \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}(n_i)(n_i - 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} |E_i| \le \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} (n_i)(n_i - 1)$$

إن:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i.(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} (n^2{}_i - n_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i{}^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i$$

حسب التمهيدية فأن:

$$\sum_{i=1}^{k} n^2{}_i \le (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - (k-1).(2.\sum_{i=1}^{k} n_i - k) \qquad \text{(I)}$$

وبما إن : $\sum_{i=1}^{k} n_i. = n$

فإن:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i - 1) \le (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - (k-1)(2\sum_{i=1}^{k} n_i - k) - n$$

حيث : $\sum_{i=1}^{k} n_i. = n$ ، $\sum n_i^2 = (\sum_{i=1}^{k} n_i)^2 - (k-1)(2\sum_{i=1}^{k} n_i - k)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i(n_i - 1) \le n^2 - (k-1)(2n-k) = n$$

$$= n^2 - (2.n.k - 2n - k^2 + k) - n$$

$$= n^2 - 2.n.k + 2n - n + k^2 - k$$

$$= n^2 - 2.n.k + n + k^2 - k$$

$$= n^2 - (2k-1)n + k(k-1)$$

نريد عددين مجموعهما $(2k-1)$ و حداؤهما $k(k-1)$ بملاحظة العددين

k و $k-1$ نجد أن:

$$\left.\begin{array}{l} k+k-1=2k-1 \\ k*(k-1)=k.(k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$n^2-(2.k-1).n+k(k-1)=(n-(k-1))(n-k)$$

$$=(n-k+1)(n-k)$$

وبالعودة للمجموع

$$\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) \le (n-k)(n-k+1)$$

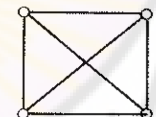
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

$$\Rightarrow |E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1) \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

$$\Rightarrow |E| \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

k عدد المركبات في البيان، $|V|=n$ عدد العقد في البيان.

مثال:

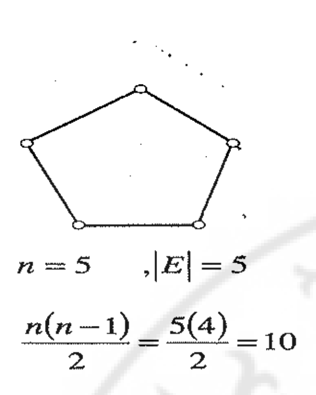


$n=4 \quad ,|E|=6$ $\qquad$ $n=3 \quad ,|E|=3$ $\qquad$ $n=2 \quad ,|E|=1$

$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{4(3)}{2}=6$ $\qquad$ $\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3(2)}{2}=3$ $\qquad$ $\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2(1)}{2}=1$

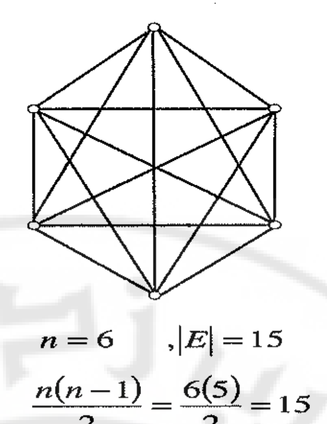
وبالتالي $|E|$ لا يمكن ان يتجاوز $\frac{n(n-1)}{2}$

الشكل(17)



$n=5 \quad ,|E|=5$

$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{5(4)}{2}=10$



$n=6 \quad ,|E|=15$

$\frac{n(n-1)}{2}=\frac{6(5)}{2}=15$

الشكل(18)

تعريف:

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ وليكن الضلع $e\in E$ عندئذ، إن الضلع e جسر في G إذا وفقط إذا كان $G-\{e\}$ نحصل على بيان مكون من عدة مركبات.

مبرهنة (4):

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ وليكن الضلع $e\in E$ عندئذ، إن الضلع e جسر في البيان G إذا وفقط إذا كان الضلع e غير محتوى في أي دائرة من دوائر البيان G.

البرهان:

نفرض أن الضلع $e=(x,y)$ جسر في البيان G. إذاً $G-\{e\}$ غير مترابط. نفرض أن الضلع e محتوى في دائرة. لتكن هذه الدائرة هي:

إذاً $x=x_1,e_1,x_2,\dots,x_{i-1},e_{i-1},x_i=y,e_i=e,x_{i+1}=x$

فإن $y=x_i,e_i=e,x_{i+1}=x$ و $x=x_1,e_1,x_2,\dots,x_{i-1},e_{i-1},x_i=y$

ممران من العقدة x إلى العقدة y. . وبالتالي، إن أي عقدتين مرتبطين بوساطة ممر يحتوي على الضلع e فإنهما مرتبطان بممر لا يحتوي على الضلع

e وبما أن البيان G مترابط فإن $G-\{e\}$ مترابط. إن هذا يناقض أن $G-\{e\}$ البيان غير مترابط وبالتالي، فإن الضلع e غير محتوى في أية دائرة من دوائر البيان G.

الآن نفرض أن الضلع e غير محتوى في أية دائرة ونثبت أن الضلع e جسر. نثبت المكافئ العكسي. لذلك، نفرض أن الضلع e ليس جسراً في البيان G. إذاً البيان $G-\{e\}$ بيان مترابط. ليكن $e=(x,y)$ إذاً يوجد ممر $x=x_1,e_1,\ldots,e_{i-1},x_i=y$ في $G-\{e\}$ وبالتالي، فإن $x=x_1,e_1,\ldots,e_{i-1},x_i=y,e,x$ دائرة في البيان G.

4- البيان المتمم

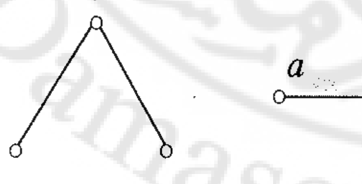
تعريف :

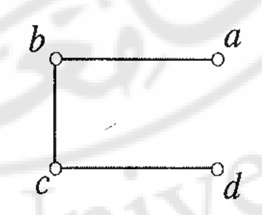
ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$. فإن البيان البسيط المتمم للبيان G هو البيان $\overline{G}=(V;\overline{E})$ وفق ما يلي:

من أجل أي عقدتين $\forall x,y\in V$ حيث $x\neq y$ فإن $(x,y)\in E$ إذا وفقط كان $(x,y)\notin \overline{E}$ نقول أن البيان $\overline{G}$ هو البيان المتمم للبيان G.

مثال:

متممات البيانات التالية:

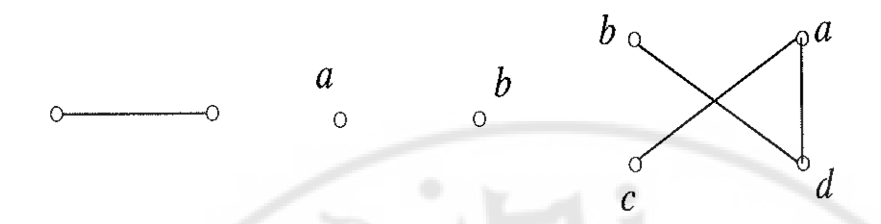




a b

الشكل(19)

هي:



الشكل(20)

على التوالي.

مبرهنة (5)

إذا كان البيان G بياناً بسيطاً فإن البيان G أو البيان المتمم $\overline{G}$ بياناً مترابطاً.

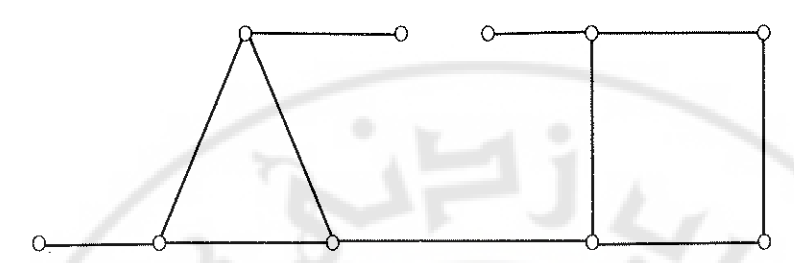
البرهان:

نفرض أن G غير مترابط ونثبت أن $\overline{G}$ مترابط. لتكن $C_1, C_2, \cdots, C_m$ هي مركبات G وليكن $x, y \in V$ حيث $x \neq y$. نفرض أن:

$C_i(V_i, E_i)$ لكل $i = 1,2,\ldots,m$. إذا وجد $r \neq k$ حيث $y \in V_k, x \in V_r$ فإن $(x,y) \in \overline{E}$ وبالتالي فإن $x,(x,y),y$ ممر من العقدة x إلى العقدة y في البيان المتمم $\overline{G}$. أما إذا وجد t حيث $x, y \in V_t$ ففي هذه الحالة نختار أي عقدة $z \in V_r$ حيث $r \neq t$. إذاً، $(x,z),(z,y) \in \overline{E}$ وبالتالي فإن الممر $x,(x,z),z,(z,y),y$ ممر من العقدة x إلى العقدة y في البيان $\overline{G}$. إذاً البيان $\overline{G}$ هو بيان مترابط.

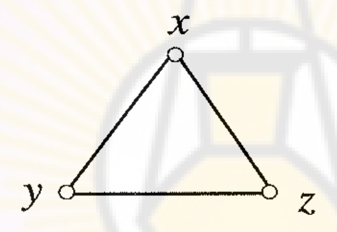
تمارين

1- أوجد جميع الجسور في البيان المعطى بالشكل التالي:

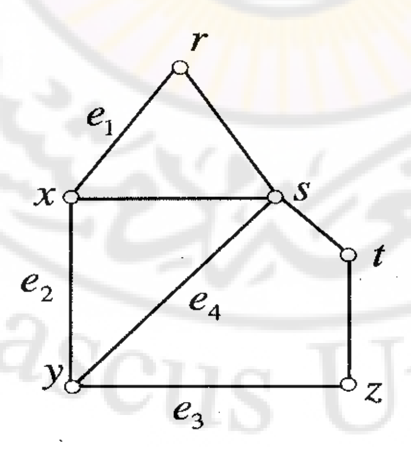


2- ليكن لدينا البيان المترابط $G(V;E)$ حيث لا يحتوي على دوائر. أثبت أنه يوجد على الأقل عقدتين بحيث $x \neq y$ في مجموعة العقد V و يكون $\deg(x) = \deg(y) = 1$

3- أوجد جميع البيانات الجزئية للبيان المعطي بالشكل التالي:



4- ليكن البيان G المعطى بالشكل التالي:



أوجد البيان الجزئي المولد بوساطة:

أ- مجموعة العقد $\{x, y, t, s\}$

ب- مجموعة العقد $\{x, y, r, z\}$

ت- مجموعة الأضلاع $\{e_1, e_3, e_4\}$

5- ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$.

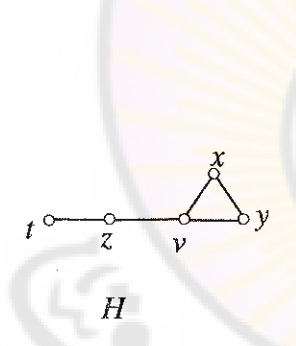
أ- إذا كان $|V| = 6$ فأثبت أنه يوجد دائرة طولها 3 في G أو $\overline{G}$.

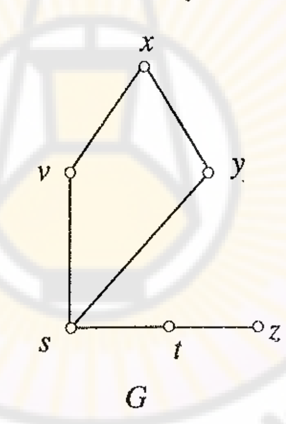
ب- بين أن العبارة (أ) ليست صحيحة إذا كان $|V| = 5$.

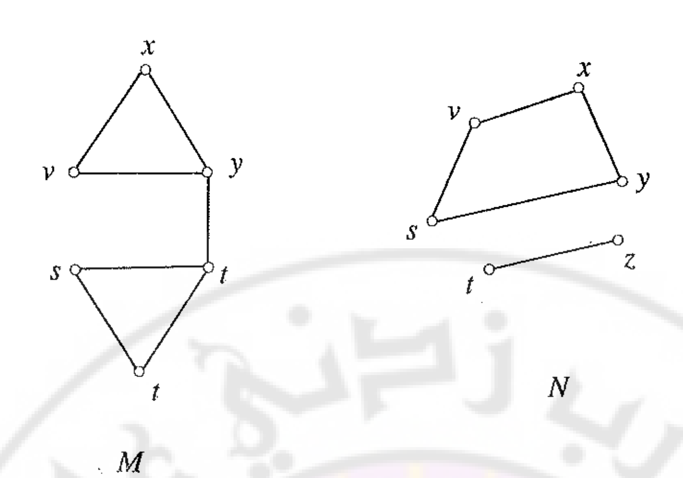
6- ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ وليكن $m = \min\{\deg(x) : x \in V\}$ و $M = \max\{\deg(x) : x \in V\}$.

أثبت أن $m|V| \leq 2|E| \leq M|V|$

7- بين فيما إذا كان أي من البيانات N, M, H بياناً جزئياً من البيان G

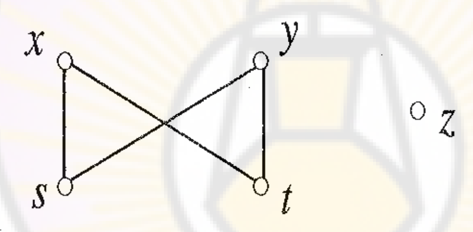






8- أثبت أنه إذا كان البيان G بياناً يحتوي على عقدتين فرديين فقط فإن هذين العقدتين تنتميان إلى نفس المركبة في G.

9- أوجد البيان المتمم للبيان المعطى في الشكل الآتي:



10- ما العلاقةُ بين عدد أضلاع البيان G وعدد أضلاع البيان $\overline{G}$.

11- ليكن لدينا البيان المترابط $G(V;E)$ ولا يحتوي على دوائر بحيث $|V| = n$

أثبت أن $|E| = n-1$.(استخدم مفهوم الاستقراء الرياضي).

الفصل الثالث

المسارات والدوائر،بيانات أولر وبيانات هاملتون

paths and cycles, Euler and Hamilton Graphs

1- مقدمة

إن مفهوم المسارات والدوائر في البيانات له أهمية في نظرية البيان وخاصة في المجالات التطبيقية لنظرية البيان.

2- تعاريف

ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$ وليكن $x,y \in V$ ليكن $|V|=n$ حيث $n \geq 1$ عدداً صحيحاً.

تعريف:

المسار walk : في بيان من عقدة v_0 إلى عقدة v_n هي متتالية متناوبة من العقد والأضلاع $w=\{v_0,e_1,v_1,e_2,\dots,e_n,v_n\}$ بحيث أن e_i يربط بين العقدتين v_{i-1},v_i من أجل $i=1,2,\dots,n$.

تعريف:

المسار الموجه : هو متتالية متناوبة $w=<v_0,\dots,v_n>$ من العقد والأقواس بحيث أن مصدر القوس $\vec{e}_i$ هو عقدة الهدف v_i للقوس $\vec{e}_{i-1}$ من أجل $i=1,2,\dots,n$.

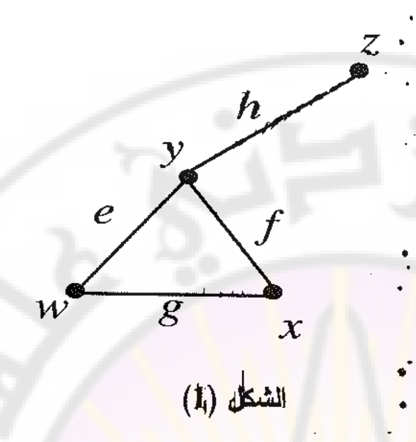
تعريف:

طول المسار (المسار الموجه) هو عدد الأضلاع (الأقواس) في المتتالية.
يكون المسار مسار مغلق إذا كانت عقدة البداية هي نفسها عقدة النهاية.

مثال :

$$w=<x,f,y,h,z,h,y,e,w,g,x>$$

مسار مغلق طوله 5.



الشكل (1)

نقول عن العقدة v إنها قابلة للوصول reachable من العقدة u إذا وجد مسار من u إلى v.

نقول عن بيان أنه مترابط connected إذا وجد مسار بين أي عقدتين u,v.

نقول عن بيان موجه أنه مترابط بقوة strongly connected إذا وجد بين عقدتين u,v مسار موجه من u إلى v ومن v إلى u.

البعد distance بين عقدتين s,t هو طول أقصر مسار من s إلى t أو هو ∞ إذا لم يوجد مسار بينهما.

تعريف:

إذا كانت $v_1,e_1,v_2,\cdots,e_{n-1},v_n$ متتالية متناوبة من العقد والأضلاع حيث $v_1=x,v_n=y$ و $e_i=(v_i,v_{i+1})$ وذلك من أجل أي i فإننا نسميها مساراً من x إلى y.

تعريف:

إذا كانت $v_1,e_1,v_2,\cdots,e_{n-1},v_n$ متتالية متناوبة من العقد والأضلاع حيث

$x = v_1 = v_n$ و $e_i = (v_i, v_{i+1})$ وذلك من أجل أي i فإننا **نسميها مساراً مغلقاً** من x إلى x

تعريف:

إذا كان $v_1, e_1, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_n$ مساراً من x إلى y فإننا نسميه **طريقاً** إذا كان $e_i \neq e_j$ من أجل $i \neq j$

تعريف:

إذا كان $v_1, e_1, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_n$ طريقاً مغلقاً من x إلى x فإننا نسميه **(دائرة)**

تعريف:

إذا كان $v_1, e_1, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_n$ مسار من x إلى y فإننا **نسميه ممراً** إذا كان $v_i \neq v_j$ من أجل $i \neq j$.

تعريف:

إذا كان $v_1, e_1, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_n$ ممراً مغلقاً من x إلى x حيث $n > 3$ فإننا نسميه دائرة. كما نسمي الممّر المغلق x, e_1, v_2, e_2, x دائرة إذا كان $e_1 \neq e_2$

تعريف:

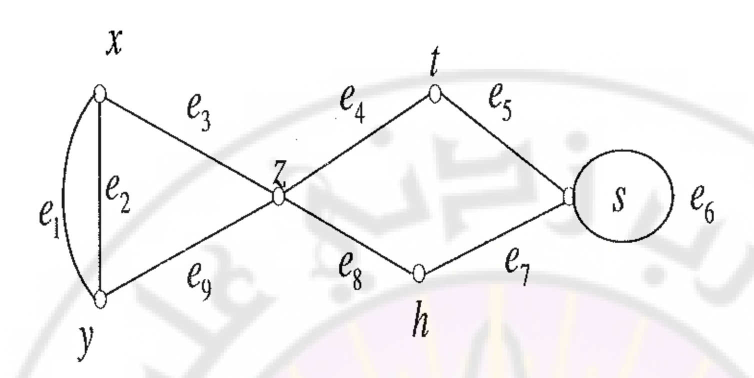
إذا كان $v_1, e_1, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_n$ مساراً من x إلى y فإننا نرمز لهذا المسار بالرمز $x, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_n, y$ وإذا كان مساراً مغلقاً من x إلى x فإننا نرمز له بالرمز w إذا كان w مساراً مفتوحاً (أو مغلقاً) ونعرف طول المسار w بأنه عدد الأضلاع التي يحتويها ونرمز له بالرمز $L(w)$

تعريف:

نقول إن المسار w فردي إذا كان $L(w)$ عدد فردياً، ونقول أنه زوجي إذا كان $L(w)$ عدد زوجياً.

مثال:

ليكن G هو البيان المعطى بالشكل (2)



الشكل (2)

نلاحظ أن

أ- $xe_2e_3e_4e_4e_3y$ مسار من x إلى y طوله 5.

ب- $xe_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8e_9y$ فردية طولها 7 وليست دائرة.

ت- $ze_4e_5e_6e_7e_8z$ دائرة زوجية طولها 4

3- مبرهنات المسارات

مبرهنة (1)

ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$ وليكن $x, y \in V$ ليكن $|V|=n$

أ- إذا كان $v_1, e_1, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_n$ ممراً من العقدة x إلى العقدة y فإنه طريق من العقدة x إلى العقدة y.

ب- إذا كانت $v_1, e_1, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_n$ ممراً من x إلى x فإنه دائرة من x إلى x.

البرهان:

أ- نبرهن المكافئ العكسي. نفرض أن $v_1,e_1,v_2,\cdots,e_{n-1},v_n$ ليس طريقاً. إذاً يوجد i و j حيث $i \neq j$ و $e_i = e_j$. إذاً، إن طرفاً للضلع e_i يتكرر في المتتالية وبالتالي فإنها ليست ممراً وهذا تناقض وبالتالي فإن $v_1,e_1,v_2,\cdots,e_{n-1},v_n$ طريق من العقدة x إلى العقدة y.

ب-نبرهن المكافئ العكسي. نفرض أن $v_1,e_1,v_2,\cdots,e_{n-1},v_n$ ليست دائرة. إذاً يوجد $i \neq j$ حيث $e_i = e_j$.نميز حالتين:

- إذا كان $n = 3$ فإن v_1,e_1,v_2,e_2,v_3 ليست دائرة لأن $e_1 = e_2$.
- إذا كان $n > 3$ و $i < j$. إذا كان e_i عروة عندئذ فإن المتتالية ليست دائرة. نفرض أن e_i ليس عروة. إذاً يوجد طرف للضلع e_i مختلف عن v_1 ويوجد طرف للضلع e_j مختلف عن v_n، وبالتالي، فإن طرفاً مختلفاً عن $v_1 = v_n$ للضلع $e_i = e_j$ يتكرر في المتتالية.

إذاً، المتتالية $v_1,e_1,v_2,\cdots,e_{n-1},v_n$ ليست ممراً وهذا تناقض وبالتالي فإن $v_1,e_1,v_2,\cdots,e_{n-1},v_n$ دائرة من x إلى x..

ملاحظة:

إذا كان المسار w دائرة فإنه ليس بالضرورة دائرة ، وبالمثل إذا كان المسار w طريقاً فإنها ليست بالضرورة ممراً.

مبرهنة (2)

ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$ وليكن $x,y \in V$ ليكن $|V| = n$

أ- إذا وجد مسار من x إلى y فإنه يوجد ممر من x إلى y.

ب- إذا وجد مسار من x إلى x فإنه توجد دائرة من x إلى x.

البرهان:

أ- نفرض أن (يوجد مسار طوله n من x إلى y : n)$=A$. إذن $A=\phi$. بالاستناد إلى مبدأ الترتيب. نفرض أن m عدد أصغري في A بحيث يكون $v_1,e_1,\dots,e_m,v_{m+1}$ مساراً طوله m من x إلى y . إذا وجد $i<j$ بحيث $v_i=v_j$ فإن $v_1,e_1,\dots,v_i,e_{j+1},v_{j+1},e_{j+2},\dots,e_m,v_{m+1}$ مسار من x إلى y وطوله أصغر من m وهذا تناقض، إذا فإن $v_1,e_1,v_2,\dots,e_m,v_{m+1}$ ممر من x إلى y .

ب- البرهان مشابه لبرهان الفقرة (أ).

مثال :

البيان المعطى في المثال السابق. لاحظنا في ذلك المثال أن $x,e_2,y,e_3,z,e_4,z,e_5,s,e_7,h,e_8,z,e_9,x$ دائرة من x إلى x . إذا حذفنا المسار من z إلى z فإننا نحصل على الدائرة x,e_2,y,e_3,z,e_9,x .

مبرهنة (3)

ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$. إذا وجد $x\neq y; x,y\in V$ ، حيث يوجد ممران مختلفان من x إلى y فإن G يحتوي على دائرة.

البرهان:

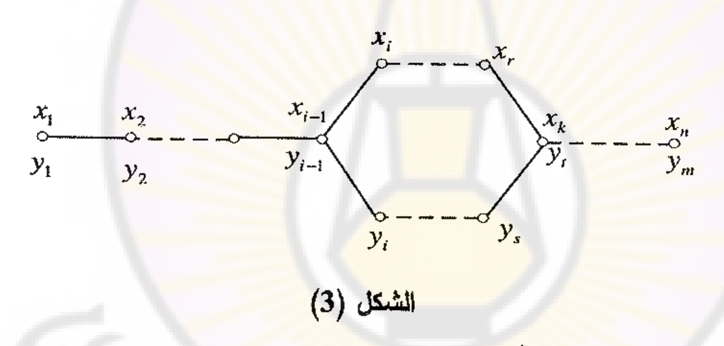
إذا احتوى البيان G على عروة أو على ضلع مضاعف فإن البيان G يحتوي على دائرة.

الآن نفرض أن البيان G يحتوي على دائرة. ونفرض أن $y=y_1,c_1,y_2,\dots,c_{m-1},y_m=x \wedge x=x_1,e_1,x_2,\dots,e_{n-1},x_n=y$ ممران مختلفان من x إلى y . بما أن الممرين مختلفين فإنه يوجد i حيث

ولكن $x_1 = y_1, \ldots, x_{i-1} = y_{i-1}$ نضع $x_i \neq y_i$ (يوجد $i < j \leq m$ حيث $A = (r : i < r \leq n$ و $x_r = y_j$ بما أن $x_n = y_m$ فإن $n \in A$ وبالتالي فإن $A = \phi$ بالاستناد إلى مبدأ الترتيب، يوجد عدد أصغري k في A. إذن يوجد $i < t \leq m$ حيث $x_k = y_t$ الآن نعتبر المسار المغلق:

$$y_{i-1} = x_{i-1}, e_{i-1}, x_i, e_i, \ldots, e_{k-1}, x_k = y_t, c_{t-1}, y_{t-1}, \ldots, c_{i-1}, y_{i-1} = x_{i-1}$$

إن هذا المسار مغلق يبدأ من x_{i-1} ثم يتبع الممر الأول لغاية x_k ثم يعود متبعاً الممر الثاني لغاية y_{i-1} بما أن $x_i \neq y_i$ فإن طول هذا الممر المغلق أكبر أو يساوي 3. من تعريف الممر ينتج أن $x_{i-1}, \ldots, x_k$ عقد مختلفة، وبالاستناد إلى تعريف k ينتج أن $x_r \neq y_s$ من أجل $i-1 < s < t, i-1 < r < k$ إذن، إن المسار المغلق المنشأ هو في دائرة من x_{i-1} إلى x_{i-1} ، أنظر الشكل (3).



الشكل (3)

ملاحظة:

ليكن لدينا البيان البسيط $G = (V; E)$ حيث لا يحتوي البيان G على دوائر وليكن $x \neq y, x, y \in V$ بالاستناد إلى المكافئ العكسي للمبرهنة (1) نجد أنه يوجد على الأكثر ممر واحد من x إلى y.

4- بيانات أويلر

تعد مسألة البحث عن مسار ذي مواصفات معينة في البيان من المسائل الهامة في نظرية البيان. ومن الناحية التاريخية، فقد بدأ أويلر دراسة هذه المسائل عندما قام بحل مسألة الجسور السبعة.

تعريف:

لتكن C دائرة في البيان G. نقول إن C دائرة أويلر في البيان G إذا كانت تحتوي على جميع عقد وجميع أضلاع G. نقول أن G بيان أويلر إذا كان G يحتوي على دائرة أويلر.

تعريف

ليكن لدينا طريقاً W في البيان G. نقول إن W طريق أويلر في البيان G إذا كان يحتوي على جميع عقد وجميع أضلاع البيان G. نقول إن البيان G بيان نصف أويلر إذا كان البيان G يحتوي على طريق أويلر.

ملاحظة:

توجد أكثر من طريقة لتمييز البيانات، كما توجد أكثر من خوارزمية لإيجاد دوائر أويلر.

مبرهنة (4)

ليكن لدينا البيان المترابط $G=(V;E)$ الذي يحوي الدائرة $x=x_1,e_1,x_2,\dots,e_{n-1},x_n=x$ و ليكن لدينا البيان $H=(V;E-\{e_1\ ,e_2\ ,\dots,e_{n-1}\})$. وليكن لدينا البيان $G'=(V',E-\{e_1\ ,\dots,e_{n-1}\})$ بحيث

$V'=\{\ v\in V:H$ عقدة غير عزولة في $v\ \}$، عندئذ، إذا كانت $V'\neq\phi$ فإن $V'\cap\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\neq\phi$.

البرهان

لتكن العقدتين $x\in\{x_1\ ,x_2\ ,\dots,x_n\}$ و $y\in V$ و بما أن البيان G بيان مترابط فإنه يوجد ممر $x=y_1\ ,e_1\ ,y_2\ ,\dots,e_{m-1}\ ,y_m=y$ من العقدة x إلى

العقدة y في البيان G. ليكن $1 \le r \le m$ هو أكبر عدد صحيح بحيث تكون العقدة $y_r \in \{x_1 ,x_2 ,\dots,x_n\}$. نميز حالتين:

-من أجل $r = m$ فإن العقدة y_r غير معزولة فإن $y_r \in V'$ ، إذا $y = y_m \in V' \cap \{x_1 ,x_2 ,\dots,x_n\}$.

- من أجل $r < m$ فإننا نستنتج من تعريف r أن العقدتين $y_r \in \{x_1 ,x_2 ,\dots,x_n\}$ و $y_{r+1} \notin \{x_1 ,x_2 ,\dots,x_n\}$ وبالتالي، فإن الضلع $e_r \notin \{e_1 ,e_2 ,\dots,e_{n-1}\}$، إذاً الضلع e_r ضلع في البيان G' وبالتالي فإن العقدة y_r غير معزولة فإن $y_r \in V'$ و $y_r \in V' \cap \{x_1 ,x_2 ,\dots,x_n\}$

إذا فإن $V' \cap \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \ne \phi$.

مبرهنة (5)

ليكن لدينا البيان $G = (V;E)$ جميع عقده زوجية، فإن البيان G لا يحتوي على جسور.

البرهان

ليكن $e = (x, y) \in E$ ولتكن جميع مركبات البيان G هي $C_1 = (V_1;E_1) ,\dots, C_r = (V_r;E_r)$، عندئذ يوجد عدد صحيح $1 \le m \le r$ بحيث $e \in E_m$، إن المركبة C_m بيان مترابط وأن جميع عقدها زوجية وقدرة كل منها أكبر من أو تساوي 2. ننشئ دائرة من العقدة x إلى العقدة x بحيث تحتوي على الضلع e كما يلي: ليكن $x = x_1 \ , e = e_1 \ , y = x_2$، عندئذ نحصل على الطريق x_1 ,e_1 ,x_2 و بما أن $\deg(x_2) \ge 2$ فإنه توجد العقدة z حيث $(x_2, z) \in E_m - \{e\}$ وليكن $z = x_3$ و $e_2 = (x_2, x_3)$، فنحصل على الطريق

الآن، نكرر هذه العملية علـــى x_3 فنحصــــل علـــى الطريـــق x_1 ,e_1 ,x_2 ,e_2 ,x_3
$x_1 ,e_1 ,x_2 ,e_2 ,x_3 ,e_3 ,x_4$.

بما أن البيان G بيان منته فإن تكرار هذه العملية يتوقف بعد عدد منته من الخطوات، لنفرض أننا حصلنا على الطريق $x_1 ,e_1 ,\ldots,x_n$ بعد عدد منتهي مـــن الخطوات. إذاً فإن $\deg(x_n)=0$ في البيـــان $H=(V_m \ ,E_m-\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}\})$. أن كل عقدة في المتتالية $e_1,x_2,\ldots,e_{n-1}$ تتأثر بعـــدد زوجـــي مـــن الأضــــلاع الموجودة في هذه المتتالية، وبالتالي فإنه إذا كان $x_1 \neq x_n$ فإن العقدة x_n عقـــدة فردي في C_m و بما أن العقدة x_n عقدة زوجية في البيان C_m فـــإن $x_1=x_n$ وبالتالي فإن المتتالية $x_1,e_1,\ldots,x_n$ دائرة تحقق المطلوب وبالتالي توجد دائـــرة تحتوي على الضلع e وحسب المبرهنة (3)، نجد أن e ليس جسراً فـــي G. وهو المطلوب

5- خوارزمية إيجاد دوائر أويلر

مبرهنة (6)

يكون البيان $G=(V;E)$ بيان أويلر إذا وفقط إذا كان البيان G بيان مترابط وكانت جميع عقدة زوجية.

البرهان

ليكن البيان G بيان أويلر، إذاً توجد دائـــرة $x=x_1 ,e_1 ,x_2 ,\ldots,e_{n-1},x_n=x$ تحتوي على جميع أضلاع البيان G. أن البيان G بيان مترابط وأن كل عقـــدة في المتتالية $e_1 ,x_2 ,\ldots,e_{n-1}$ تتأثر بعدد زوجي من الأضلاع الموجودة في هـــذه المتتالية، كما أن العقدة $x=x_1=x_n$ تتأثر بالضلعين e_1 و e_{n-1}. إذاً، جميع عقد البيان G عقد زوجية.

نفرض أن البيان G بيان مترابط وأن جميع عقده زوجية. ننشئ دائرة أويلر في البيان G وفق الخطوات التالية:

الخطوة 1: نختار العقدة $x \in V$ ثم نضع $x = x_1$ وبما أن $\deg(x) \geq 2$ فإنه يوجد $e = (x, y) \in E$ وبحيث $y = x_2$ و $e = e_1$ ، حسب المبرهنة (5)، فإن البيان G لا يحتوي على جسور وبالتالي فإننا نستطيع أن ننشئ دائرة $x = x_1, e_1, x_2, \dots, e_{n-1}, x_n = x$ من x إلى x بطريقة إثبات المبرهنة (3) نفسها.

الخطوة 2: إذا كانت المتتالية $x_1, e_1, \dots, x_n$ دائرة أويلر في البيان G فإننا نتوقف. أما إذا كانت هذه الدائرة ليست دائرة أويلر، نرمز بـ $G_1 = (V_1; E_1)$ للبيان الذي نحصل عليه من البيان G بوساطة حذف أضلاع هذه الدائرة وحذف العقد المعزولة الناتجة بعد حذف هذه الأضلاع. أن جميع العقد في البيان G_1 عقد زوجية . حسب المبرهنة (4) نجد أن المجموعة $V_1 \cap \{x_1, \dots, x_n\}$ غير خالية.

ليكن لدينا العقدة $x_j \in V_1 \cap \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ و حسب المبرهنة (3) نستطيع أن ننشئ دائرة $x_j = y_1, e_1, y_2, \dots, e_{m-1}$ و $y_m = x_j$ من العقدة x_j إلى العقدة x_j في البيان G_1، ثم نضيفها إلى الدائرة الأولى، فنحصل على الدائرة:

$$x = x_1, e_1, \dots, x_j = y_1, c_1, \dots, c_{m-1}, y_m = x_j, e_j, \dots, e_{n-1}, x_n = x$$

الخطوة 3: نكرر الخطوة (2) على الدائرة الأخيرة التي حصلنا عليها في الخطوة (2). بما أن البيان G بيان منته فإن عملية التكرار توقف بعد عدد منته من الخطوات، نحصل على دائرة أويلر في البيان G. وهو المطلوب

مبرهنة (7)

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$، عندئذ، إن البيان G بيان نصف أويلر إذا وفقط إذا كان البيان G مترابط ويحتوي على عقدتين فرديتن فقط.

البرهان

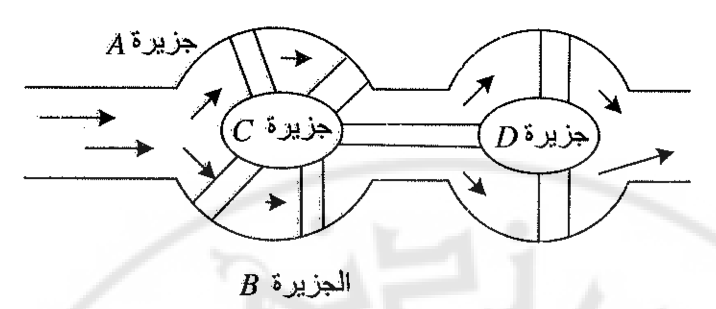
ليكن البيان G بيان نصف أويلر، عندئذٍ يوجد طريق أويلر $x=x_1, e_1, \dots, x_n=y$ في البيان G. أن البيان G بيان مترابط وأن كلاً من العقدتين x و y عقدة فردية، بينما عقد البيان G الأخرى $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ عقد زوجية.

نفرض أن البيان $G=(V;E)$ بيان مترابط ويحتوي على عقدتين فرديتن x و y فقط، نضيف ضلع جديد $e=(x,y)$ إلى البيان G فنحصل على بيان جديد $H=(V;E')$ بحيث $E'=E\cup\{e\}$. إن البيان H بيان مترابط وأن جميع عقد البيان H عقد زوجية.

حسب المبرهنة (6)، نجد أن البيان H بيان أويلر، إذاً توجد دائرة أويلر C في البيان H، نحذف الضلع e من الدائرة C فنحصل على طريق أويلر W في البيان G وبالتالي، فإن البيان G بيان نصف أويلر. وهو المطلوب

مثال : (مسألة الجسور السبعة)

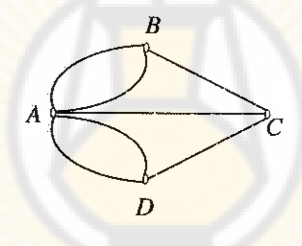
مدينة تقع على نهر وتنتشر أحياؤها على ضفتي النهر وعلى جزيرتين تقعان في النهر. تتصل أجزاء هذه المدينة بوساطة سبعة جسور كما في الشكل :(4)



الشكل (4)

هل يوجد مكان في هذه المدينة حيث ننطلق منه ثم نعبر كــل جســر مــن الجسور السبعة مرة واحدة ثم نعود إلى المكان نفسه ؟

الحل:

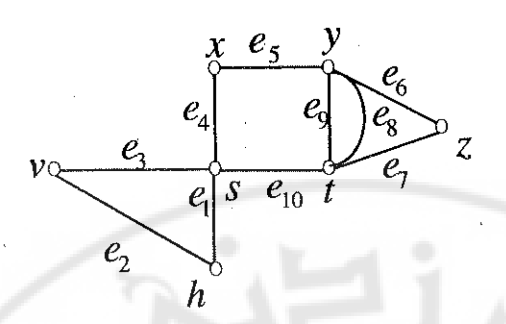


الشكل(5)

هل هذا البيان هو بيان أويلر؟ أن البيان يحتوي على عقد فردية، إذاً، البيان غير أويلر، كما أن البيان ليس نصف أويلر .

مثال:

استخدم خوارزمية إيجاد دوائر أويلر لإيجاد دائرة أويلر في البيان المعطى بالشكل (6)



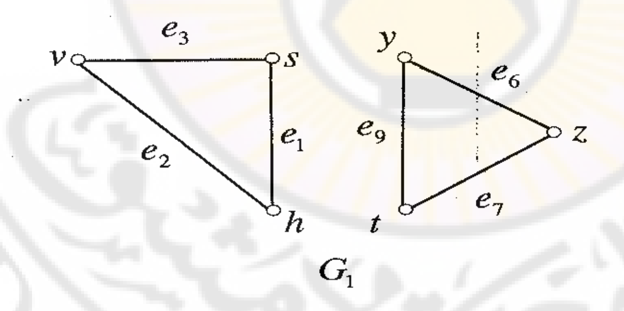
الشكل (6)

الحل

نختار أية دائرة A :

$$x\ e_5\ \ y\ e_8\ \ t\ e_{10}\ \ s\ e_4\ \ x$$

نحذف أضلاع هذه الدائرة كما نحذف العقد التي معزولة الناتجة بعد حذف هذه الأضلاع فنحصل على البيان G_1 :



الشكل (7)

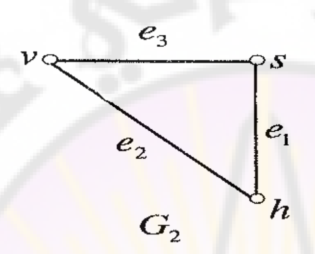
نختار عقدة مشتركة بين الدائرة A والبيان G_1. ولتكن العقدة y فنحصل على الدائرة B :

$y\ e_6\ z\ e_7\ t\ e_9\ y$

بإضافة B إلى A ، نحصل على الدائرة D :

$x e_5\ y\ e_6\ z\ e_7 t\ e_9\ y\ e_8\ t\ e_{10}\ s\ e_4\ x$

بتكرار الحذف، نحصل على البيان G_2 :



الشكل (8)

نختار العقدة المشترك s ونحصل على الدائرة F :

$s\ e_1\ h\ e_2\ v\ e_3\ s$

بإضافة F إلى D، نحصل على دائرة أويلر:

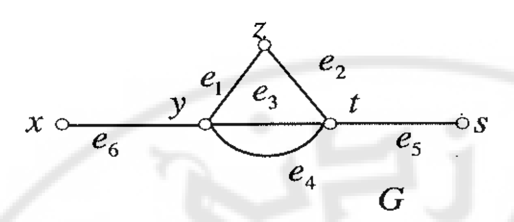
$x\ e_5\ y e_6\ z e_7\ t\ e_9\ y\ e_8\ t\ e_{10}\ s\ e_1\ h\ e_2\ v\ e_3\ s\ e_4\ x$

ملاحظة :

إذا كان البيان G بيان نصف أويلر فإنه بعد إضافة ضلع يربط بين العقدتين الفرديتن نحصل على بيان أويلر. ويمكن استخدام الخوارزمية السابقة للحصـــول على دائرة أويلر ثم نحذف الضلع المضاف فنحصل على طريق أويلر في البيان G. يمكن استخدام الخوارزمية للحصول على طريق أويلر حيث نبدأ بطريق من عقدة فردية إلى العقدة الفردية الأخرى...الخ.

مثال :

أوجد طريق أويلر في البيان المعطى بالشكل (9)



الشكل (9)

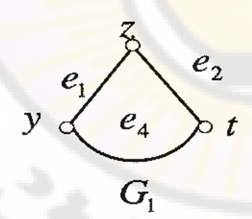
الحل

نختار طريق (أو ممر) من العقدة الفردية x إلى العقدة الفردية s.

نختار الممر A :

$$x\ e_6\ y\ e_3\ t\ e_5\ s$$

بعد الحذف، نحصل على البيان G_1:



الشكل (10)

نختار العقدة المشترك b ونحصل على الدائرة B :

$$y e_1\ z\ e_2\ t\ e_4\ y$$

بإضافة B إلى A ، نحصل على طريق أويلر:

$x\ e_6\ y\ e_1\ z\ e_2\ t\ e_4\ y\ e_3\ t\ e_5\ s$

6- خوارزمي فلّوري (Fleury) لإيجاد دوائر أويلر

ليكن لدينا البيان الأويلر $G=(V;E)$. للحصول على دائرة أويلر في البيان G نطبق الخطوات التالية:

الخطوة 1: اختر أي عقدة $x_0 \in V$ وضع $T_0 = x_0$.

الخطوة 2: نفرض أننا أنشأنا الطريق $T_j =< x_0\, e_1\ x_1\ e_2 \cdots e_j\ x_j >$، اختر ضلع e_{j+1} من $E-\{e_1\ ,e_2\ \ldots,e_j\}$ حيث:

أ- e_{j+1} يؤثر على العقدة x_j.

ب-الضلع e_{j+1} ليس جسراً في البيان $G_j = G-\{e_1\ ,e_2\ \ldots,e_j\}$ إلا إذا لم يكن هناك خيار آخر.

نضع $T_{j+1} =< x_0\, e_1\ x_1\ e_2 \cdots e_j\ x_j\ e_{j+1}\, x_{j+1} >$

الخطوة 3: توقف عندما لا تستطيع تكرار الخطوة (2).

مبرهنة (8)

إذا كان البيان $G=(V;E)$ بيان أويلر فإن كل طريق منشأة بوساطة خوارزمية فلوري هي دائرة أويلر في البيان G.

البرهان

لتكن الطريق $W_n =< x_0\, e_1\ x_1 \cdots e_n\ x_n >$ طريق في البيان G، منشأة بوساطة خوارزمية فلوري. أن $\deg(x_n)=0$ في البيان G_n، إذاً العقدة $x_0 = x_n$ وبالتالي فإن W_n دائرة في البيان G. لنفرض أن W_nالطريق لا تحتوي على جميع أضلاع البيان G. لتكن .مجموعة العقد $S=\{x\in V : G_n$ $\deg(x)>0\}$ في و $\overline{S}=V-S$. أن $S\neq\phi$، حسب المبرهنة (4)، نجد أن

$S\cap\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}\neq\phi$ ، إذاً فأن $x_n\in\overline{S}$. ليكن $0<m<n$ هـو أكبـر عـدد صحيح بحيث $x_m\in S$ و $x_{m+1}\in\overline{S}$ و لتكن المجموعة:

$A=\{e\in E:\overline{S}$ يربط بين عقدة من S وعقدة من $\}$

من تعريف $\overline{S}$ ، ينتج أن $A\cap(E-\{e_1,\ldots,e_m,\ldots,e_n\})\neq\phi$ وبالتـالي فـإن $A\cap(E-\{e_1,\ldots,e_m\})\subseteq\{e_{m+1},\ldots,e_n\}$.حسـب تعريـف m نجـد أن $A\cap(E-\{e_1,\ldots,e_m\})=\{e_{m+1}\}$ ، إذاً فإن الضلع e_{m+1} جسر في البيـان G_m و بما أن العقدة $x_m\in S$ فإن $\deg(x_m)>0$ في البيان G_n. إذاً، يوجد ضلع e يؤثر على العقدة x_m بحيث $e\neq e_m$ و $e\neq e_{m+1}$ و بما أن الضلع e_{m+1} جسر في البيان G_m . حسب الخطوة (2) في الخوارزمية نجد أن الضلع e جسر فـي البيـان G_m. ليكن $G_m[S]$ هو البيان المولد بوساطة المجموعة S في البيان G_m ، إذاً فإن البيان $G_n[S]$ هو البيان المولد بوساطة المجموعة S فـي البيـان G_n. أن البيان G_n هو بيان جزئي من البيان G_m وبالتالي فإن البيان $G_n[S]$ هو بيـان جزئي من البيان $G_m[S]$ وبما أن الضلع e جسر في البيان G_m فإن الضـلع e جسر في البيان $G_n[S]$ ومن جهة أخرى، بما أن الضلع e_{m+1} جسر في البيـان G_m وبمـا أن $0<m<n$ هـو أكبـر عـدد صـحيح بحيـث $x_m\in S$ فـإن $G_m[S]=G_n[S]$. ولكن لكل عقدة $x\in S$ فإن $\deg(x)$ في البيان $G_n[S]$ تساوي $\deg(x)$ في البيان G_n. إذاً، جميع عقد البيان $G_n[S]$ زوجية. حسب المبرهنـة (5)، نجد أن البيان $G_n[S]$ لا يحتوي على جسور و هذا تناقض. وهو المطلوب

مثال :

استخدم خوارزمية فلوري لإيجاد دائرة أويلر في البيان G المعطـى فـي المثال السابق.

الحل:

نختار العقدة v والضلع e_3 ونكون الطريق $v e_3 s$. الأضلاع e_1، e_4، e_{10} تؤثر على العقدة s والضلع e_1 جسر في البيان $G-\{e_3\}$. لذلك، يمكن اختيار e_4 أو e_{10}. نختار e_{10} ونكون الطريق $v e_3 s e_{10} t$، ثم نختار e_7 ونكون الطريق $v e_3 s e_{10} t e_7 z$، ثم نكون الطريق $v e_3 s e_{10} t e_7 z e_6 y$ وذلك لأن e_6 هو الضلع الوحيد المؤثر على z في البيان $G-\{e_3,e_{10},e_7\}$. إن الأضلاع e_9,e_8,e_5 تؤثر في العقدة y والضلع e_5 جسر في البيان $G-\{e_3,e_{10},e_7,e_6\}$ لذلك نستطيع اختيار أحد الضلعين e_9,e_8. نختار الضلع e_8 ونكون الطريق $v e_3 s e_{10} t e_7 z e_6 y e_8 t$ على الترتيب، فنحصل على دائرة أويلر التالية:

$$v e_3 s e_{10} t e_7 z e_6 y e_8 t e_9 y e_5 x e_4 s e_1 h e_2 v$$

ملاحظة:

إذا كان البيان $G=(V;E)$ بيان نصف أويلر فإنه يمكن استخدام خوارزمية فلوري لإيجاد الطريق الأويلر شريطة البدء بعقدة فردية.

7- بيانات هاملتون

تعريف :

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$. ولتكن C دائرة محتواة فيه، نسمي الدائرة C دائرة هاملتون، إذا كانت تحتوي على جميع عقد البيان G و يسمى البيان G بيان هاملتون إذا كان G يحتوي على دائرة هاملتون.

تعريف :

إذا كان p ممراً في البيان G، نسمي الممر p ممر هاملتون إذا كان يحتوي على جميع عقد البيان G و يسمى البيان G بيان نصف هاملتون إذا كان يحتوي على ممر هاملتون.

ملاحظة:

لا توجد خوارزمية ذات كلفة معقولة لإيجاد دوائر هاملتون في أي بيان.

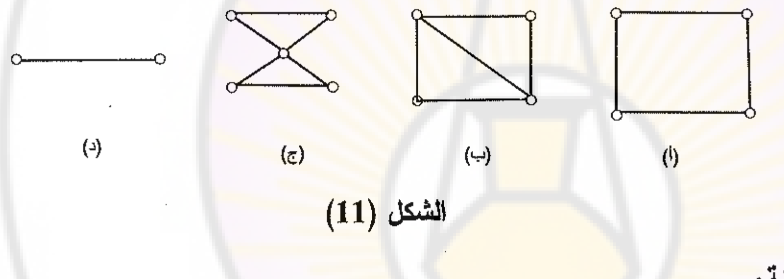
ملاحظة:

1- إن مفهوم بيانات أويلر منفصل عن مفهوم بيانات هاملتون.

مثال:

البيانات المعطاة في الشكل (11) يبين ما يأتي:

البيان (أ) بيان أويلر و بيان هاملتون.البيان (ب) بيان هاملتون ولكنه ليس بيان أويلر.البيان (جـ) بيان أويلر ولكنه ليس هاملتون. البيان (د) ليس بيان أويلر وليس بيان هملتون



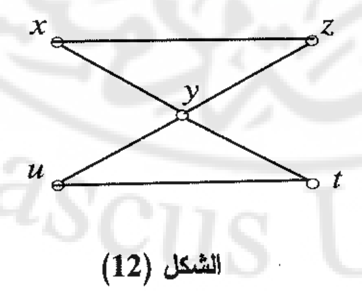
الشكل (11)

ملاحظة:

كل بيان هاملتون هو بيان نصف هاملتون ولكن العكس غير صحيح.

مثال:

البيان المعطى في الشكل (12)، نصف هاملتون ولكنه ليس بيان هاملتون.



الشكل (12)

نقبل المبرهنة الآتية من دون برهان.

مبرهنة (9)

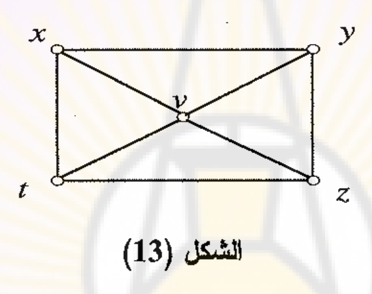
ليكن لدينا البيـــان البســـيط $G=(V;E)$ عـــدد عقـــدة $|V|=n\geq 3$ حيـــث $\deg(x)+\deg(y)\geq n$ من أجل أي عقدتين $(x,y)\in E, x\neq y, \forall x,y\in V$ فـــإن البيان G بيان هاملتون.

ملاحظة:

تقدم المبرهنة شرط كافي وغير لازم لإيجاد بيانات هاملتون.

مثال:

البيان المعطى في الشكل (13) يحقق شروط المبرهنة (9) وبالتالي، فإنـــه بيان هاملتون.

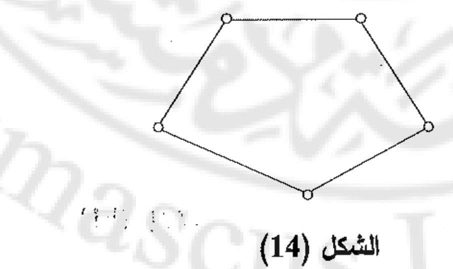


الشكل (13)

من السهل أن نرى أن الدائرة $vyxtzv$ هي دائرة هاملتون.

مثال:

البيان المعطى في الشكل (14) هو بيان هاملتون.



الشكل (14)

أن $\deg(x)+\deg(y)=4$ من أجل أي عقدتين $\forall x,y\in V$، $(x,y)\in E, x\neq y$. يبين المثال إن الشرط المعطى في المبرهنة (9) كافٍ وغير لازم بالضرورة.

نتيجة :

ليكن لديان البيان البسيط $G=(V;E)$ عدد عقدة $|V|=n\geq 3$ حيث $\deg(x)\geq \frac{n}{2}$ من أجل أي عقدة $\forall x\in V$ فإن البيان G هو بيان هاملتون.

البرهان

لتكن العقد $x,y\in V$ و $(x,y)\in E$ نلاحظ أن:

$$\deg(x)+\deg(y)\geq \frac{n}{2}+\frac{n}{2}\geq n$$

وحسب مبرهنة (9)، نجد أن البيان G هو بيان هاملتون.

مثال:

إن البيان $K_{3,3}$ هو بيان هاملتون.

الحل:

$K_{3,3}$ يحتوي على 6 عقد و $\deg(x)=3$ من أجل أي عقدة $\forall x\in V$.

نتيجة:

ليكن لديان البيان البسيط $G=(V;E)$ وعدد عقدة $|V|=n\geq 3$ بحيث $\deg(x)+\deg(y)\geq n-1$ من أجل أي عقدة $\forall x,y\in V$، $(x,y)\in E, x\neq y$، عندئذ البيان G بيان نصف هاملتون.

البرهان

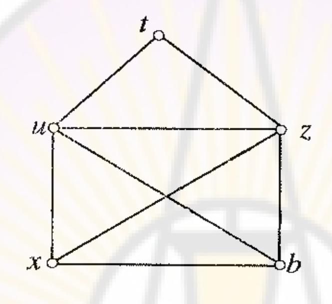
ننشئ البيان $G'=(V';E')$ كما يلي: نضيف عقدة جديد x_0 تجاور كل عقدة من عقد البيان G. عندئذ $G'=(V';E')$ يحقق المبرهنة (9). إن البيان G' هو بيان هاملتون، إذاً فإن البيان G بيان نصف هاملتون.

تمارين

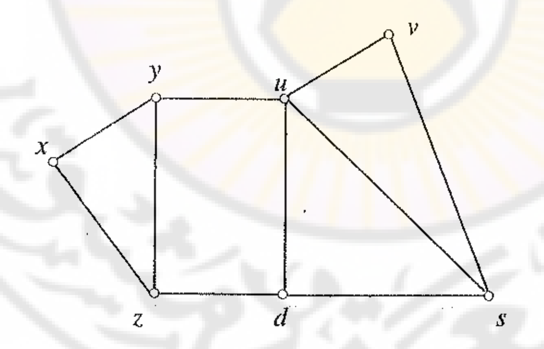
1- ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ ولتكن A هي مصفوفة التجاور للبيان G.

أثبت أن a_{ij} في المصفوفة A^n هو عدد المسارات ذات الطول n من العقدة i إلى العقدة j (استخدم الاستقراء الرياضي على n).

2- استخدم تمرين (1) لإيجاد عدد المسارات ذات الطول 4 للبيان المعطى بالشكل التالي:



3- ليكن لدينا البيان المعطى بالشكل التالي:



أ- أوجد ممراً من y إلى t.

ب- أوجد طريقاً من y إلى t.

ت- أوجد دائرة من y إلى y.

ث- أوجد جميع الممرات من y إلى v.

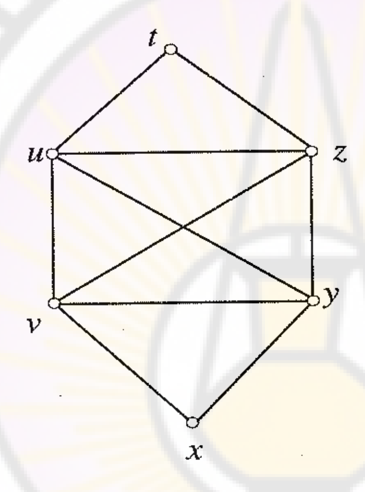
4- ليكن $G=(V,E)$ بياناً بسيطاً ولتكن R علاقة V معرفة التالي:

xRy إذا وفقط إذا كان $x=y$ أو يوجد ممر من x إلى y.

أ- أثبت أن R علاقة تكافؤ.

ب- أوجد صفوف التكافؤ للعلاقة R.

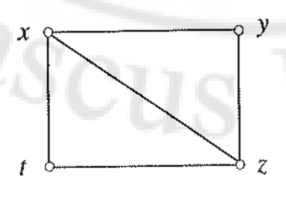
5- ليكن لدينا البيان المعطى بالشكل التالي:



أوجد دائرة تحتوي على جميع أضلاع البيان.

6- إذا كان البيان $G=(V;E)$ دائرة حيث $|V|=n$ فكم عدد الأضلاع البيان G؟

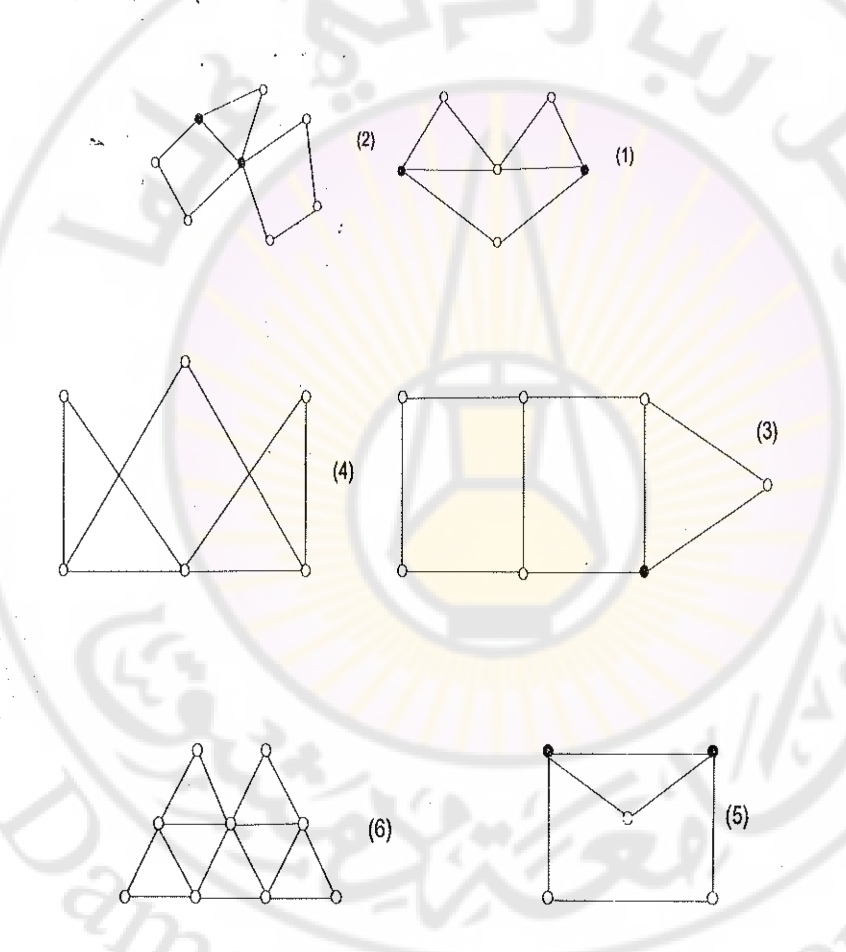
7- ليكن لدينا البيان المعطى بالشكل التالي:

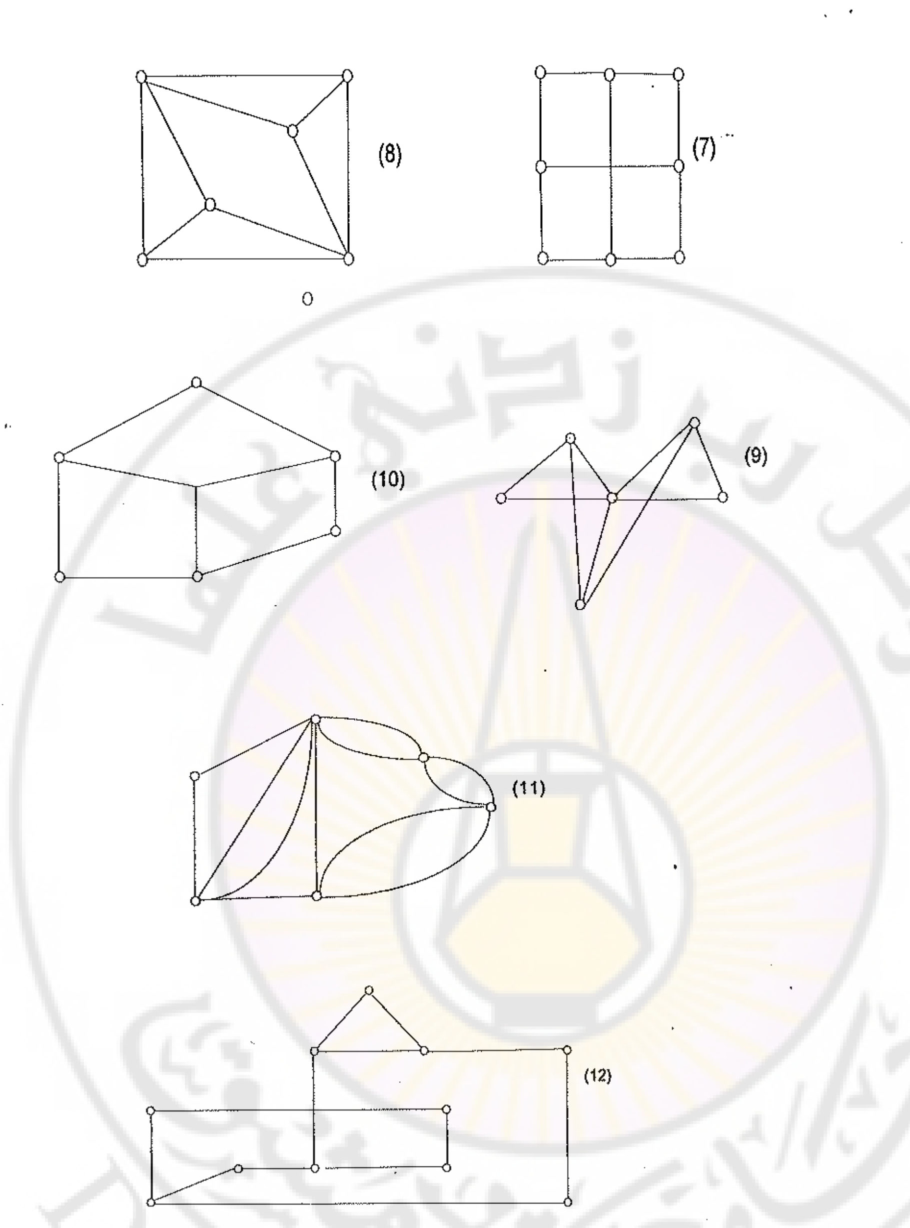


أ- أوجد دائرة تحتوي على جميع عقد البيان.

ب- أوجد جميع الدوائر التي تحتوي على جميع عقد البيان.

8- بين فيما إذا كان البيان المعطى في الحالات المبينة أدناه بيان أويلر أو نصف أويلر أم لا. إذا كان البيان أويلر ،أوجد دائرة أويلر فيه وإذا كان نصف أويلر فأوجد طريق أويلر فيه:





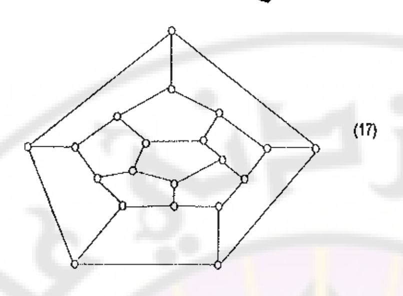
9- هل البيان K_n بيان أويلر؟

10- هل البيان $K_{n,m}$ بيان أويلر؟

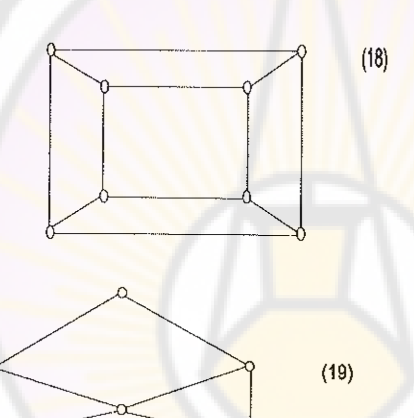
11- هل البيان K_n بيان هاملتون؟

12- هل البيان $K_{n,m}$ بيان هاملتون؟

13- بين إذا ما كانت البيانات المعطاة في الحالات الآتية بيانات هاملتون أو بيانات نصف هاملتون مع تعليل.

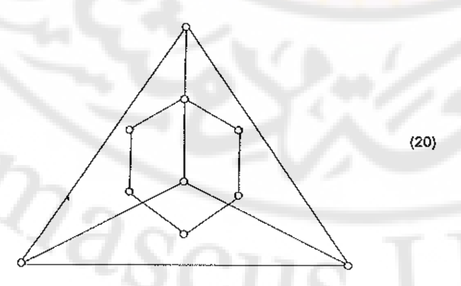


(17)



(18)

(19)



(20)

الفصل الرابع

البيانات المنتظمة، البيانات التامة والبيانات الزوجية
Regular,COMPLETE AND BIPARTITE GRAPHS

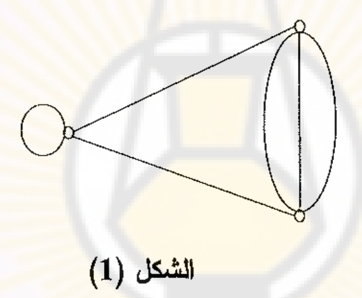
1-البيانات المنتظمة

تعريف:

ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ وليكن $r \geq 0$ عدداً صحيحاً. نقول أن البيان G بياناً منتظم من الدرجة r إذا كان قدرة أي عقدة من المجموعة العقد $\forall x \in V$ في البيان G مساوية لـــ $\deg(x) = r$.

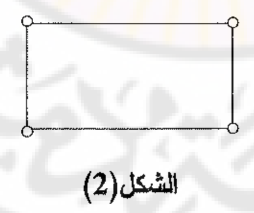
مثال :

أ- البيان الأتي بيان منتظم من الدرجة (4):



الشكل (1)

ب- البيان الأتي بيان منتظم من الدرجة (2):



الشكل(2)

مبرهنة (1)

ليكن لدينا البيان المنتظم $G(V;E)$ من الدرجة r ولتكن $|V| = n$ فإن

$$|E| = \frac{n * r}{2}$$

البرهان:

نعلم أن مجموع قدرات العقد في البيان هو $\sum_{x\in V}\deg(x)=2|E|$. إذاً

$\sum_{x\in V} r = 2|E|$ وبالتالي، فإن $n*r=2|E|$. إذاً $|E|=\frac{n*r}{2}$

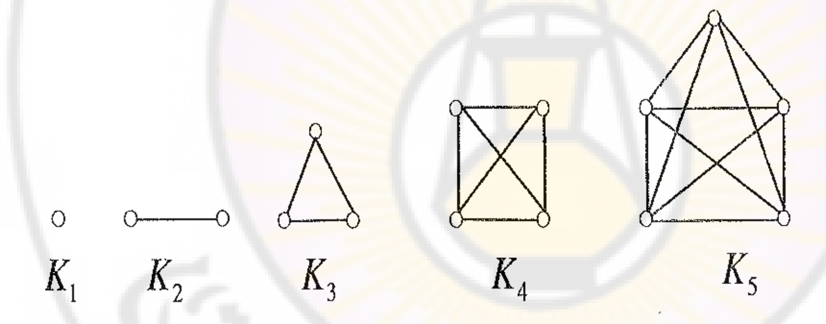
2- البيان التام

تعريف:

إن البيان البسيط K_n حيث عدد عقده يساوي $|V|=n$ بيان تام، إذا تحقق ما يلي:

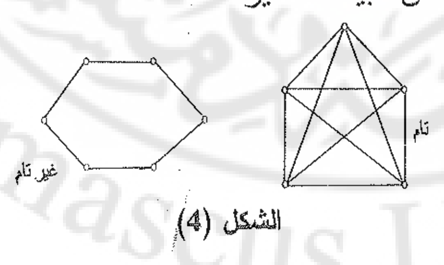
إذا كان من أجل العقدتين المختلفتين x و y في K_n ، يوجد ضلع واحد فقط e في K_n حيث $e=(x,y)$

الشكل التالي يبين بعض البيانات التامة:



الشكل (3)

الشكل الأتي يبين بعض البيانات غير التامة:



الشكل (4)

تعريف:

نقول عن البيان $G_1(v_1;E_1)$ إنه بيان جزئي من البيان $G_2(v_2;E_2)$ إذا تحقق ما يلي:

- مجموعة عقده محتواة في مجموعة عقد البيان الأصلي $G_1(v_1;E_1)$. ومجموعة أضلاعه محتواة في مجموعة أضلاع البيان الأصلي.

مبرهنة (2)

ليكن لدينا البيان التام $K_n=(V;E)$ ، عندئذ فإن $|E|=\dfrac{n*(n-1)}{2}$

البرهان:

واضح أن البيان التام K_n هو بيان منتظم من الدرجة $(n-1)$ وبالتالي، فإن $|E|=\dfrac{n*(n-1)}{2}$. وهو المطلوب

ملاحظة:

البيان المتمم هو بيان إذا أضفناه للبيان الأصلي نحصل على بيان تام.

3-البيانات الزوجية (تجزئة البيانات)

تعريف:

ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$ فإن البيان G زوجي (بيان ثنائي التجزئة) إذا وجد مجموعتين جزئيتين V_1,V_2 من المجموعة العقد V بحيث:

$$V=V_1\cup V_2\ ,V_1\cap V_2=\phi\ ,V_2\neq\phi\ ,V_1\neq\phi$$

أي إذا كان طرف الضلع $e\in E$ ينتمي إلى المجموعة V_1 فأن الطرف الآخر للضلع e ينتمي إلى المجموعة V_2. عندئذ نكتب: $G=(V_1,V_2;E)$

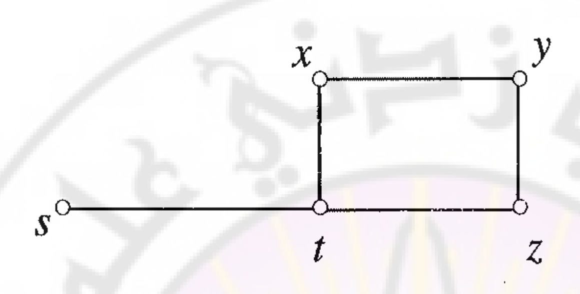
تعريف:

ليكن لدينا البيان الزوجي $G=(V_1,V_2;E)$. نقول أن البيان الزوجي G بيان

تام إذا كانت كل عقدة من المجموعة V_1 تجاور كل عقدة في المجموعة V_2. في هذه الحالة، إذا كان $|V_1| = m$ و $|V_2| = n$ فإننا نرمز لهذا البيان بالرمز $K_{m,n}$

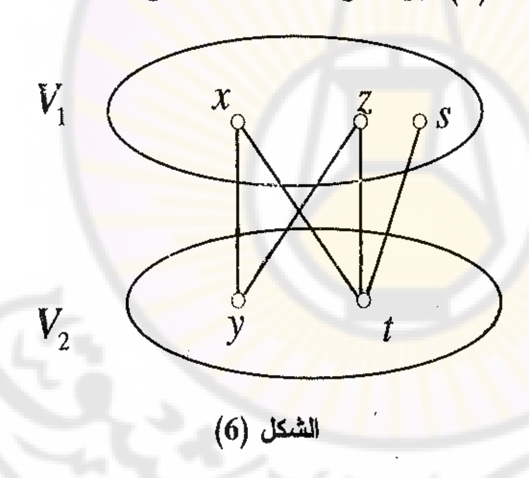
مثال :

أ- البيان المعطى بالشكل(5)



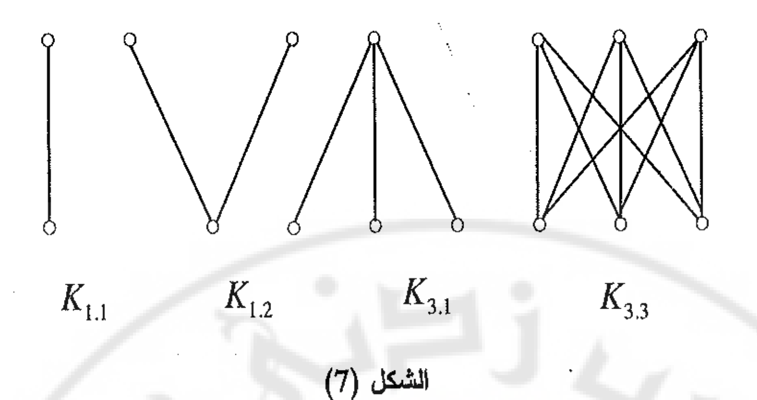
الشكل (5)

بيان زوجي والشكل (6) يبين تجزئة مناسبة لمجموعة العقد:



الشكل (6)

ب- يبين الشكل (7) بعض البيانات الزوجية التامة:

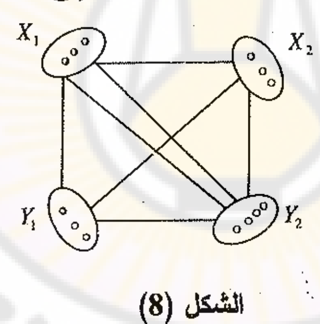


الشكل (7)

تعريف:

البيان المتعدد الأجزاء وهو بيان يمكن تجزئة مجموعة عقده لعدة أجزاء بحيث يحقق ما يلي:

اجتماع هذه الأجزاء يعطي مجموعة العقد. وتقاطع أي من هذه الأجزاء هو ϕ. ولا يوجد ضلع يربط بين عقدتين من نفس المجموعة. ونرمز له بـــ $G(X_1,X_2,......X_n;E)$ (جزئت مجموعة عقده إلى n مجموعة)



الشكل (8)

مبرهنة (3)

إذا كان $K_{m,n}(V_1,V_2;E)$ حيث $|V_1|=m$ و $|V_2|=n$ فإن $|E|=m*n$

البرهان:

بما أن:

$$\sum_{x\in V_1}\deg(x)+\sum_{x\in V_2}\deg(x)=2|E|$$

فإن:

$$\sum_{x\in V_1} n + \sum_{x\in V_2} m = 2|E|$$

إذاً:

$$m*n + n*m = 2|E|$$

ومنه فإن:

$$|E| = m * n$$

نتيجة:

الشرط اللازم والكافي ليكون البيان البسيط المترابط $G=(V;E)$ بيناً زوجياً هو أنه لا يملك هذا البيان أي دائرة فردية.

4- المسافة بين عقدتين

تعريف :

ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ ولتكن العقدتين $x,y\in V$ بحيث $x\neq y$ نرمز للمسافة بين x و y بالرمز $d(x,y)$ ونعرفها كما يلي:

أ- إذا كان لا يوجد ممر بين العقدة x والعقدة y فإن $d(x,y)=\infty$.

ب- إذا كان يوجد ممر من العقدة x إلى العقدة y فإن:

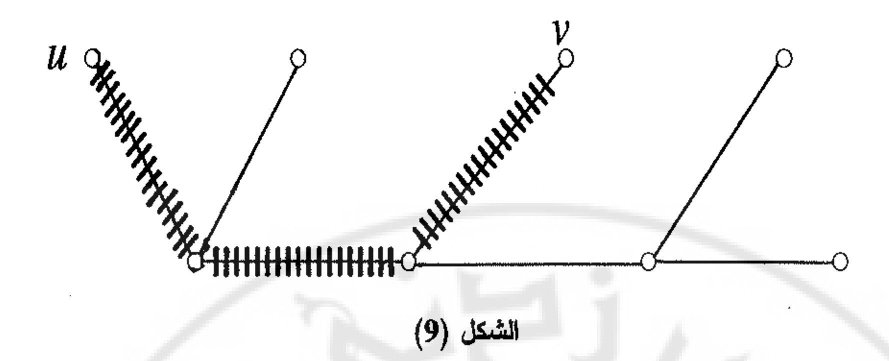
$d(x,y)=\min\{L(w):$ ممر من العقدة x إلى العقدة y $w\}$.

ملاحظة:

نعرف المسافة $d(x,x)$ بين العقدة x والعقدة x كما يلي: $d(x,x)=0$.

مثال :

ليكن لدينا البيان التالي:

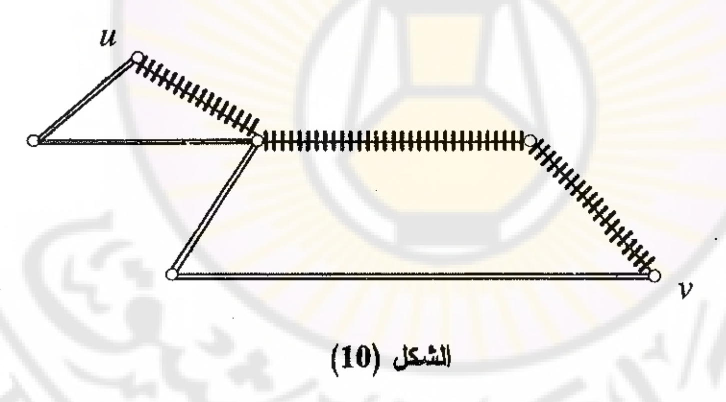


الشكل (9)

إن $d(u,v)$ هو عدد أضلاع المسار الأقصر الذي يربط بين v,u في هذا البيان فنلاحظ أن المسار المظلل هو المسار الوحيد الذي يربط بين v,u ، عندئذ يكون $d(u,v)=3$

مثال :

ليكن لدينا البيان التالي:



الشكل (10)

إن $d(u,v)$ هو عدد أضلاع المسار الأقصر الذي يربط بين v,u في هذا البيان فنلاحظ أن المسار المظلل هو المسار الوحيد الذي يربط بين v,u ، عندئذ يكون $d(u,v)=3$

مبرهنة (4)

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بحيث $|V|>1$ عندئذ يكون البيان G بيان

زوجي إذاً وفقط إذا كان البيان G لا يحتوي على دوائر فردية.

البرهان:

نفرض أن البيان $G=(V;E)$ بيان زوجي $G=(V_1,V_2;E)$ ولتكن $v_1,e_1,v_2,\dots,e_{n-1},v_n$ دائرة من العقدة x إلى العقدة x نفرض أن $x\in V_1$ ، فإن $x\notin V_2$.

بما أن $v_1\in V_1$ فإن $v_2\in V_2$, $v_3\in V_1$, $v_4\in V_2$ ...الخ. إذاً $v_i\in V_1$ لكل عدد فردي أو $v_j\in V_2$ لكل عدد زوجي j. إذاً n عدد فردي وبالتالي، فإن $v_1,e_1,\dots,v_n$ دائرة زوجية طولها $n-1$.

الآن نفرض أن $G=(V;E)$ لا يحتوي على دوائر فردية. بما أن البيان G بيان زوجي إذا وفقط إذا كان كل مركبة من مركبات البيان G ثنائية التجزئة فإننا نفرض أن البيان G بيان مترابط. نختار أي عقدة $y\in V$ ونعرف V_1 و V_2 كما يلي:

$x\in V:\{V_1=$:عدد زوجي$\}\, d(y,x)$

$x\in V:\{V_2=$:عدد فردي$\}\, d(y,x)=V-V_1$

لتكن العقدتين $x,y\in V_2$ حيث $x\neq y$ ولنثبت أن العقدتين y و x غير متجاورتين، وذلك بوساطة التناقض. نفرض أن $(x,y)\in E$.بما أن $x\in V_2$ فإنه يوجد ممر فردي $x_1\ ,e_1\,x_2\ ,\dots,e_{n-1}\ \ x_n$ من العقدة z إلى العقدة x طوله $d(z,x)$. بالمثل، يوجد ممر فردي $y_1\ ,c_1\ ,y_2\ ,\dots,c_{m-1}\ \ y_m$ من العقدة z إلى العقدة y طوله $d(z,y)$و بما أن $x_1=y_1=z$ و $x_n=x\neq y=y_m$فإننا نستطيع أن نجد عدداً i بحيث:

أ- $1\le i<n$.

ب- يوجد i بحيث $x_i=y_j$.

ت- إن العدد i هو أكبر عدد يحقق (أ) و (ب).

لنثبت أن $i = j$:

-من أجل $i < j$ فإن $x_1 , e_1 ,x_2 , \dots ,x_{i=} y_j , c_j , \dots, y_m$ مسار من العقدة z إلى العقدة y طوله أصغر من $d(z,y)$ وهذا يتناقض تعريف المسافة $d(z,y)$.

- من أجل $j < i$ فإننا نحصل بنفس الطريقة على تناقض.

إذاً $i = j$. وبالتالي فإن:

$$z = y_i = x_i \ , e_i \ ,\dots, x_n = x,(x,y) , y = y_m \ ,c_{m-1} ,\dots ,y_i = x_i = z$$

دائرة فردية (مسار فردي + ضلع +مسار فردي=دائرة فردية)، وهذا يتناقض مع فرضنا أن G لا يحتوي على دوائر فردية.

إذاً فإن العقدتين x و y غير متجاورين.وبنفس الطريقة نجد،إذا كان $x,y \in V_1$ حيث $x \neq y$ فإن العقدتين x و y غير متجاورتين. إذاً، G بيان زوجي.

تمارين

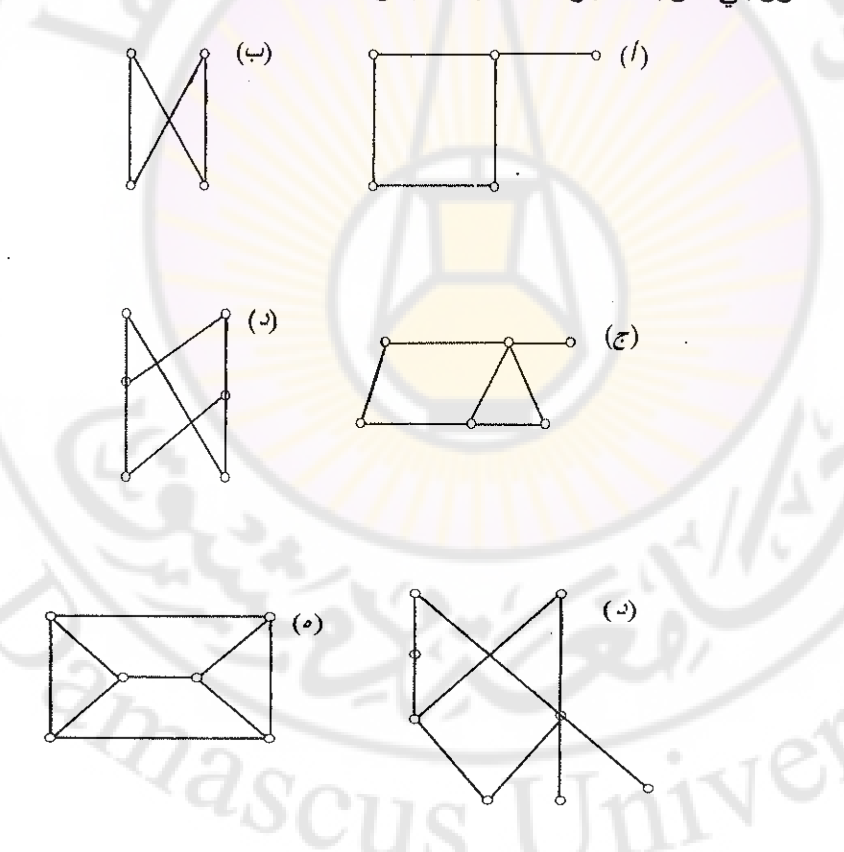
1- ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$ بحيث $|V|=n$ ، أثبت أن البيان G لا يمكن أن يكون بيان زوجي.

2- أوجد مصفوفة التجاور لكل من البيان K_5 والبيان $K_{2,3}$.

3- أعطِ مثالاً على بيان بسيط بحيث يكون منتظماً وغير تام.

4- ما البيان المتمم للبيان K_n

5- بين إذا ما كان البيانات المعطاة بيانات زوجية أم لا، وإذا كان البيان زوجي، أوجد تجزئة مناسبة لمجموعة عقده.



6- ليكن لدينا البيان البسيط المنتظم $G(V;E)$ من الدرجة k وكان $|V| = n$،
أثبت أن k زوجي أو n زوجي.

7- أعط مثالاً على بيان زوجي منتظم من الدرجة 2 ويحتوي على 6 عقدة.

8- أعط مثالاً على بيان زوجي منتظم من الدرجة 3 ويحتوي على 8 عقدة.

9- أوجد مثالاً على بيان زوجي منتظم من الدرجة r ويحتوي على $2r + r$ عقدة.

10- أعط مثالاً لبيان بسيط من الدرجة 1 و 2 و 3.

11- أثبت أن البيان $K_{m,n}$ بيان منتظم إذا وفقط إذا كان $m = n$.

12- أوجد البيان المتمم للبيان $k_{3,3}$.



الفصل الخامس

الأشجار
trees

1- مقدمة

إن مفهوم الأشجار المستخدم في نظرية البيان له تطبيقات في العلوم الاجتماعية و الاقتصادية، والصناعات الالكترونية.

للأشجار تطبيقات هامة جداً في نظرية القرار وكذلك تلعب دوراً استراتيجياً في بناء شبكات الهاتف والكهرباء والمياه وشبكات الصرف الصحي، وكما يمكن تطبيقها في بناء وتخطيط المدن وتوجيه تدفق السير في المدن الكبرى.

وفيما يلي نعرض بعض الأشجار الممكنة :

1_ ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ بحيث تكون $|V|=n$

$n=0 \Rightarrow 0=\phi$ (البيان خالي)

$n=1 \Rightarrow 0$ (عقدة واحدة)

هناك حالة واحدة فقط هي: $n=2 \Rightarrow$

أيضاً حالة واحدة فقط $n=3 \Rightarrow$

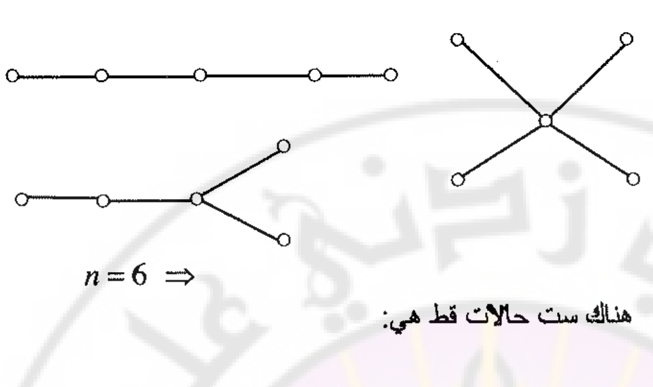
$n=4 \Rightarrow$

هناك حالتين فقط هي:

الشكل (1)

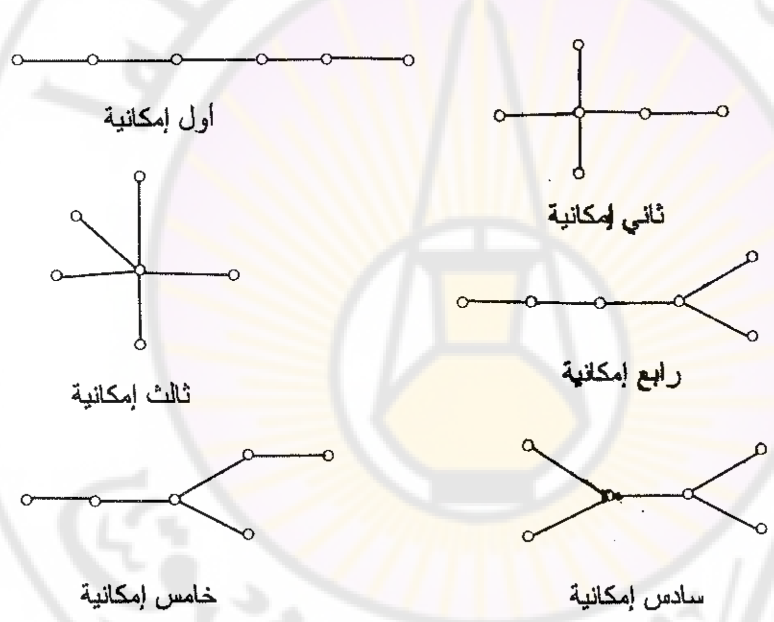
$n = 5 \Rightarrow$

هناك ثلاث إمكانيات فقط:



$n = 6 \Rightarrow$

هناك ست حالات قط هي:



الشكل (2)

2-خواص الأشجار

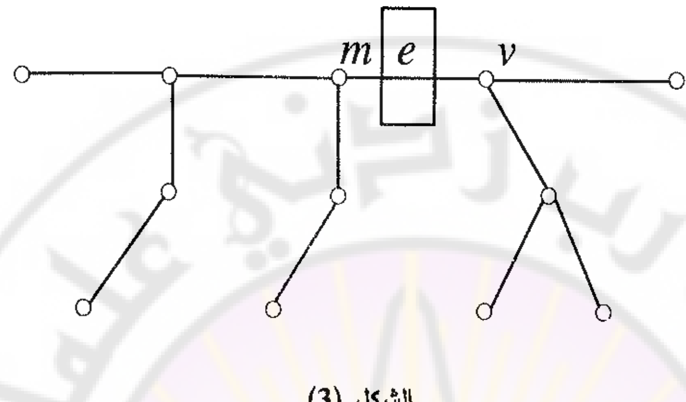
أ- إن حذف أي ضلع من الشجرة ينتج بيان منفصل.

ب- إذا كان لدينا بيان وهذا البيان ليس شجرة فإنه يوجد ضلع واحد على الأقل إذا حذفناه يبقى البيان مترابط.

ت- إذا كان البيان مترابط وعدد أضلاعه n-1 فإن هذا البيان شجرة.

ملاحظة:

لتكن لدينا الشجرة التالية:



الشكل (3)

بحذف ضلع e من الشجرة $T(V;E)$ نحصل على شجرتين ونحصل على ما يسمى بالغابة forest.

3-تعاريف ومبرهنات

تعريف:

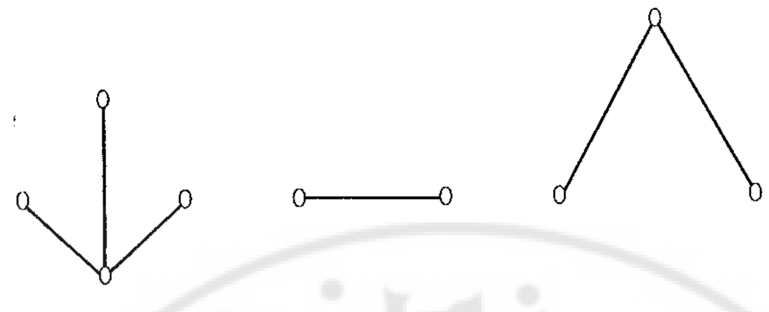
نسمي البيان البسيط المترابط $G(V;E)$ شجرة، إذا كان لا يحتوي على دائرة، ونرمز له بالرمز $T(V;E)$.

تعريف:

نسمي البيان البسيط غير المترابط $G(V;E)$ غابة إذا كان البيان لا يحتوي على دوائر.

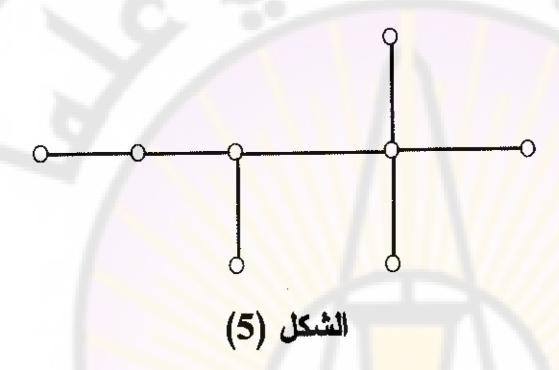
مثال :

أ- البيان التالي هو غابة:



الشكل (4)

ب-البيان التالي هو شجرة:



الشكل (5)

مبرهنة (1)

لتكن لدينا الشجرة $T(V,E)$ بحيث $|V|>1$ عندئذ، يوجد على الأقل عقدتان في T بحيث تكون قدرة كل منهما تساوي 1.

البرهان:

نختار ممراً $x_1 , e_1 , ..., e_{m-1} , x_m$ في الشجرة T بحيث يكون طوله أعظمياً بالنسبة إلى ممرات الشجرة T. نفرض أن $\deg(x_1)>1$. عندئذ يوجد $y \neq x_2$ حيث $(x_1,y)\in E$. بما أن الشجرة T لا تحتوي على دوائر فإن العقد $y \neq x_i$ من أجل $i=1,2,...,m$. وبالتالي، فإن $y,(y,x_1),x_1,e_1,...,x_m$ ممر في الشجرة T وطوله أكبر من طول الممر الأعظمي المختار. إن هذا تناقض وبالتالي، فإن $\deg(x_1)=1$. وبنفس الطريقة، يمكن إثبات أن $\deg(x_m)=1$. وهو المطلوب

مبرهنة (2)

لتكن لدينا الشجرة $T(V;E)$ بحيث $|V|>1$ عندئذ فإن عدد أضلاع الشجرة $T(V;E)$ يساوي $n-1$.

البرهان:

باستخدام الاستقراء الرياضي على n.

من أجل $n=1$ فإن عدد أضلاع الشجرة $T(V;E)$ صفر وبالتالي، فإن المبرهنة صحيحة من أجل $n=1$. نفرض أن كل شجرة $T(V;E)$ عدد عقدها k يكون عدد أضلاعها $k-1$ حيث $k\geq 1$ عدد صحيح لتكن $T'(V';E')$ شجرة حيث $|V'|=k+1$. بالاستناد إلى المبرهنة (1) نجد أنه توجد عقدة $x\in V'$ بحيث يكون $\deg(x)=1$ بما أن الشجرة T' شجرة عدد عقدها $k+1$، فإن $T'-\{x\}$ شجرة عدد عقدها k. وباستخدام فرض الاستقراء نجد أن $|E'|-1=|V'-\{x\}|-1$ إذاً $|E'|=|V'|-1$. وهو المطلوب

مبرهنة (3)

لتكن لدينا البيان المترابطة $T(V;E)$ بحيث $|V|=n$. عندئذ، فإن T شجرة إذا وفقط إذا كان $|E|=n-1$.

البرهان:

لتكن لدينا الشجرة T وبالاستفادة من مبرهنة (2) نجد أن $|E|=n-1$.

الآن نفرض أن البيان T بيان مترابط حيث $|V|=n$ و $|E|=n-1$. لإثبات أن البيان T شجرة ، نثبت أن T لا تحتوي على دوائر. نفرض أن $x_1,e_1,\dots\dots,x_n$ دائرة من العقدة v إلى العقدة v، وبالاستفادة من المبرهنة (5) في الفصل الثالث، فإن الضلع e_1 ليس جسراً في البيان T وبالتالي، فإن البيان $T-\{e_1\}$ بيان مترابط عدد عقده n وعدد أضلاعه $n-2$ ، إن هذا يناقض المبرهنة (2) في الفصل الثاني، فإن T لا تحتوي على دوائر.

مبرهنة (4)

ليكن البيان $T(V;E)$ بحيث $|V|=n$ ولا يحتوي على دوائر ، عندئذ، فإن البيان T شجرة إذا وفقط إذا كان $|E|=n-1$.

البرهان:

لتكن لدينا الشجرة $T(V;E)$ ، وبالاستفادة من المبرهنة (2) ، نجد أن $|E|=n-1$.

الآن نفرض أن البيان T بيان لا يحتوي على دوائر وبحيث $|V|=n$ و $|E|=n-1$ ولنثبت أن البيان T شجرة أي لنثبت أن البيان T بيان مترابط. لتكن $C_i=(V_i,E_i)$ حيث $i=1,...m$ هي مركبات البيان T. بما أن T لا تحتوي على دوائر فإن كل مركبة C_i لا تحتوي على دوائر ،وبالتالي، فإن كل مركبة C_i هي شجرة. إذاً، $|E_i|=|V_i|-1$ من أجل $i=1,...m$. إذاً:

$|E_1|+...+|E_m|=(|V_1|-1)+...+(|V_{m-1}|)$ وبالتالي، فإن $|E|=|V|-m$ إذاً $n-1=n-m$ وبالتالي، فإن $m=1$ إذاً ، البيان T مترابط.

مبرهنة (5)

ليكن البيان المترابط $T(V;E)$ عندئذ فإن البيان T شجرة إذا وفقط إذا كان كل ضلع في T جسراً.

البرهان:

لتكن لدينا الشجرة $T(V;E)$ إذاً $|E|=|V|-1$ وليكن الضلع $e\in E$، عندئذ، فإن الشجرة $T-\{e\}$ بيان عدد عقده $|V|$ وعدد أضلاعه $|V|-2$. بالاستناد إلى المبرهنة (2) في الفصل الثاني، نجد أن البيان $T-\{e\}$ بيان غير مترابط وبالتالي، فإن الضلع e جسر في الشجرة T.

الآن نفرض أن كل ضلع في الشجرة T جسر، بالاستناد إلى المبرهنة (4) في الفصل الثاني ، نجد أن T لا يحتوي على دوائر وبالتالي، فإن البيان T شجرة. وهو المطلوب

مبرهنة (6)

ليكن البيان البسيط $T(V;E)$ عندئذ،فإن البيان T شجرة إذا وفقط إذا كان البيان T يحقق ما يأتي:

من أجل أي عقدتين $\forall x,y\in V$ بحيث $x\neq y$ فإنه يوجد ممر وحيد من العقدة x إلى العقدة y.

البرهان:

لتكن لدينا الشجرة T ولتكن العقدتين $x,y\in V$ بحيث $x\neq y$و بما أن البيان T بيان مترابط فإنه يوجد ممر من العقدة x إلى العقدة y و بما أن البيان T لا يحتوي على دوائر و بالاستفادة من المبرهنة (3) في الفصل الثالث ، نجد أن هذا الممر وحيد.

الآن نفرض أن الشرط المذكور أعلاه محقق فإن البيان T بيان مترابط ولا يحتوي على دوائر إذاً فإن البيان T شجرة. وهو المطلوب

مبرهنة (7)

ليكن البيان البسيط $T(V;E)$ عندئذ، فإن البيان T شجرة إذا وفقط إذا كان البيان T لا يحتوي على دوائر وكان البيان T يحقق ما يلي:

إذا إضافة ضلع جديد إلى مجمعة الأضلاع E ، نحصل على بيان يحتوي على دائرة وحيدة.

البرهان:

لتكن الشجرة T وليكن $(x,y)=e\in E$. وليكن $G=(V,E\cup\{e\})$. بما أن البيان T شجرة فإن البيان T لا يحتوي على دوائر، وبالاستفادة من المبرهنة

(6)، نجد أنه يوجد ممر وحيد $x,e_1,...,y$ من العقدة x إلى العقدة y في البيان T. إذاً توجد دائرة في G. واضح أن هذه الدائرة وحيدة في G، لأنه إذا كان يوجد دائرتان مختلفتان فإن كلاً منهما تحتوي على الضلع e وبالتالي، فإنه يوجد ممران مختلفان من العقدة x إلى العقدة y في البيان G.

الآن نفرض أن البيان T بيان لا يحتوي على دوائر ويحقق الشرط المذكور أعلاه.

إذا يوجد عقدتين $x,y\in V$ بحيث $(x,y)=e\notin E$ ، أي أن العقدة x لا تجاور العقدة y فإن البيان $G=(V;E\cup\{e\})$ حيث $(x,y)=e\notin E$ يحتوي على دائرة وحيدة. إذاً يوجد ممر من العقدة x الى العقدة y ،ومنه نستنتج أن البيان T بيان مترابط وبالتالي، فإن البيان T شجرة. وهو المطلوب

تعريف :

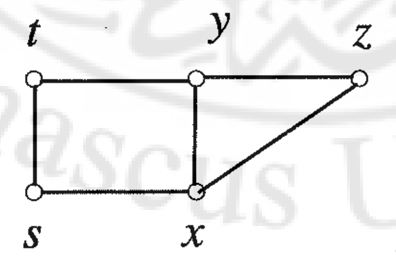
ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ وليكن $T=(V(T);E(T))$ بياناً جزئياً من البيان G نقول إن البيان T شجرة في البيان G.

تعريف :

إذا كانت الشجرة T في البيان G بحيث $V(T)=V$ فإن الشجرة T مشدودة على البيان G.

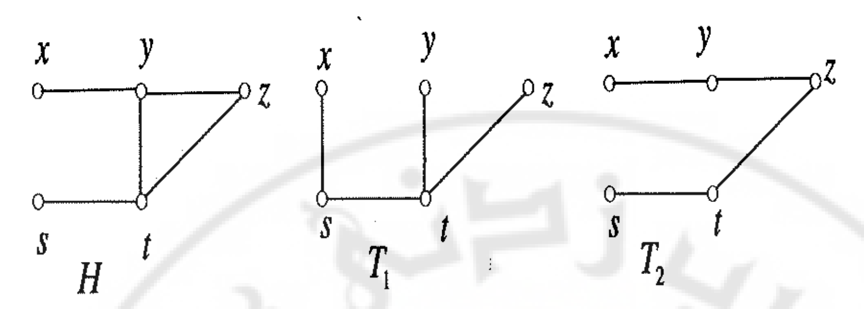
مثال :

ليكن G هو البيان المعطى بالشكل (6).



الشكل (6)

تعدّ البيانات الجزيئية الآتية:



الشكل (7)

إن كلاً من الشجرة T_1 و T_2 شجرة مشدودة على البيان G. كذلك إن H بيان جزئي مولد للبيان G ولكنه ليس شجرة.

مبرهنة (8)

ليكن لدينا البيان $G(V;E)$،عندئذ، يكون البيان G بيان مترابطاً إذاً وفقط إذا وجدت شجرة مشدودة على البيان G.

البرهان:

لنفرض أنه توجد شجرة T مشدودة على البيان G و بما أن الشجرة T بيان مترابط فإن G بيان مترابط.

الآن نفرض أن G بيان مترابط. نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد الأضلاع n لإثبات ما يلي:

كل بيان مترابط عدد أضلاعه n، من أجل أي عدد صحيح $n \geq 0$ ، يكون له شجرة مشدودة.

من أجل $n = 0$ فإن عدد الأضلاع صفر وبالتالي، فإن المطلوب صحيح. الآن نفرض أن كل بيان مترابط عدد أضلاعه k يكون له شجرة مشدودة حيث $k \geq 0$ عدد صحيح. لنبين أن البيان $H = (V(x);E(H))$ بيان مترابط حيث $|E(H)| = k+1$. إذا كان H لا يحتوي على دوائر فإن البيان H شجرة

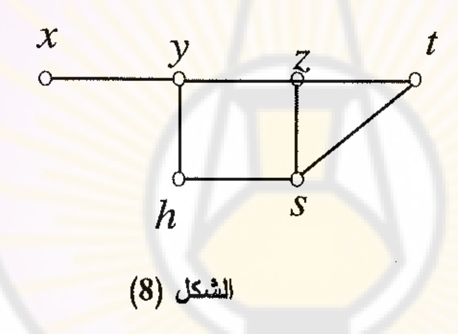
وبالتالي، فإن H شجرة مشدودة على البيان H. إذاً ، لنفرض أن H يحتوي على دوائر. ليكن الضلع e ضلعاً محتوى في إحدى هذه دوائر. إذاً الضلع e ليس جسراً في البيان H وبالتالي،فإن البيان $H-\{e\}$ بيان مترابط عدد أضلاعه k وبالاستفادة من الاستقراء نجد أنه توجد شجرة T مشدودة على البيان $H-\{e\}$ ، فإن T هي شجرة مشدودة على البيان H. وهو المطلوب

ملاحظة:

أن المبرهنة (7) تعطي طريقة لإنشاء الشجرة المشدودة على البيان. وذلك بوساطة التخلص من الدوائر عن طريق الحذف المتتابع لبعض الأضلاع.

مثال:

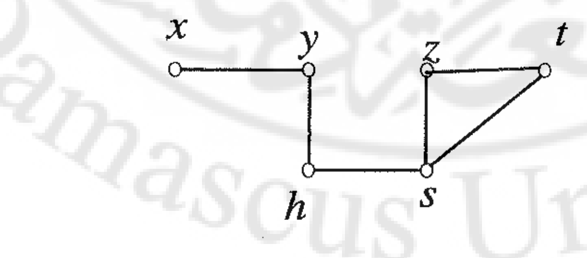
أوجد شجرة مشدودة على البيان G حيث G هو البيان في الشكل (8).



الشكل (8)

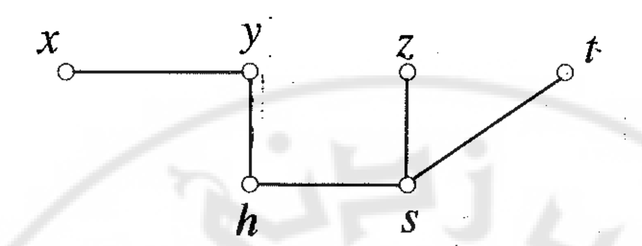
الحل:

نستخدم العقد للتعبير عن دوائر. نختار الدائرة y,z,s,h,y ونحذف أحد أضلاعها وليكن (y,z) فنحصل على البيان في الشكل (9):



الشكل (9)

ثم نختار دائرة في البيان الجديد ونحذف أحد أضلاعها. نحذف (z,t) من الدائرة z,t,s,z فنحصل على البيان في الشكل (10):



الشكل (10)

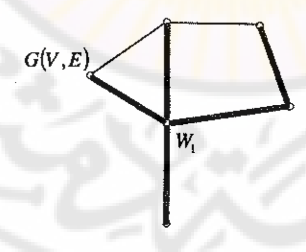
أن البيان الناتج هو شجرة مشدودة على البيان G.

إن الطريقة المتبعة في المثال السابق لإنشاء شجرة مشدودة ليست مناسبة للاستخدام في الحاسوب.

تعريف:

ليكن لدينا البيان البسيط المترابط $G(V;E)$ حيث $|V|=n$, $|E|=m$، ولتكن الشجرة مشدودة على البيان $G(V;E)$ هي $T(V';E')$ وهي بيان جزئي حيث $V=V'$ ، $E'\subseteq E$

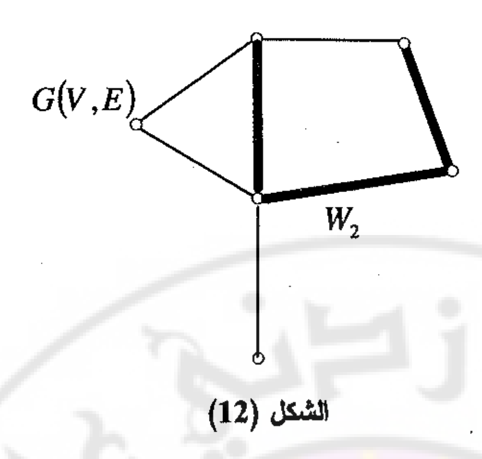
مثال:



الشكل (11)

إن w_1 هي شجرة مشدودة على البيان $G(V;E)$.

في حين w_2 هي شجرة في البيان



الشكل (12)

تعريف:

السقالة هي شجرة مشدودة على البيان كلفتها أصغريه إذا كان البيان موزون .

ملاحظة :

لإيجاد السقالة في بيان موزون نوجد جميع الأشجار المولدة في البيان، ثم نختار الشجرة المشدودة على هذا البيان وذات الكلفة الأصغريه، فتكون السقالة.

ملاحظة :

كلفة الشجرة هي مجموع أوزان أضلاع هذه الشجرة.

تعريف:

الوتر هو الضلع ينتمي للبيان $G(V;E)$ ولا ينتمي للشجرة المشدودة على البيان $T(V;E')$.

مبرهنة (9)

ليكن لدينا البيان البسيط المترابط $G(V;E)$ حيث $|V|=n$ و $|E|=m$ ، عندئذ إذا كانت $T(V;E')$ هي الشجرة المشدودة على البيان $G(V;E)$ فإن البيان $G(V;E)$ يملك $m-n+1$ وتراً .

الإثبات :

بما أن عدد أضلاع البيان هو m وعدد أضلاع الشجرة T هو n - 1 ،

فإن الأضلاع التي لا تنتمي للشجرة هي الأوتار إذا عدد الأوتار يساوي:

r =m-(n-1) = m-n+1 . وهو المطلوب

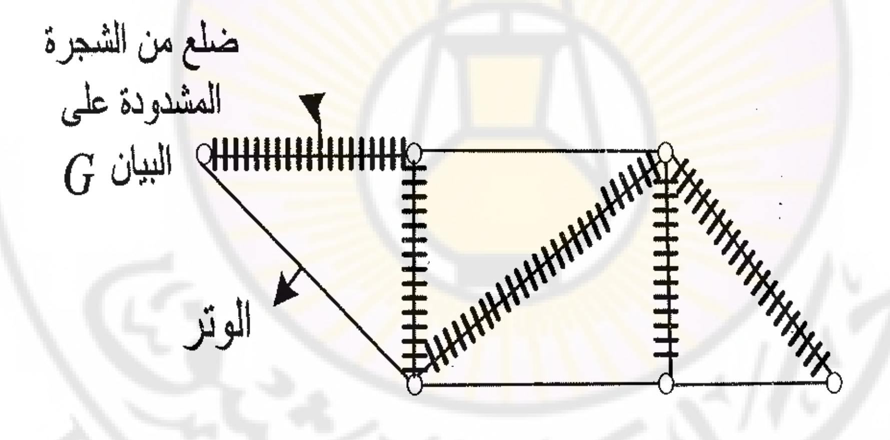
مثال:

ليكن لدينا البيان المبين بالشكل (13) ، فإن $|r| = 6$ ، $|E| = 9$

إذا الشجرة المولدة في البيان T(V',E') حيث $|v| = 6$

و $|E'| = 6-1 = 5$، فإن عدد الأوتار:

r=m-n+1=9-6+1=4



الشكل (13)

تعريف:

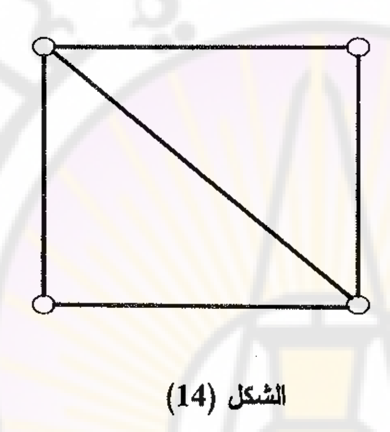
ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ بحيث $|V| = n$ و $|E| = m$ ولتكن T شجرة مشدودة على البيان $G(V;E)$، نسمي الدائرة الناتجة من إضافة وتر للشجرة T دائرة أساسية.

ملاحظة:

إن عدد الدوائر الأساسية في البيان $G(V;E)$ يساوي عدد الأوتار في البيان $G(V;E)$.

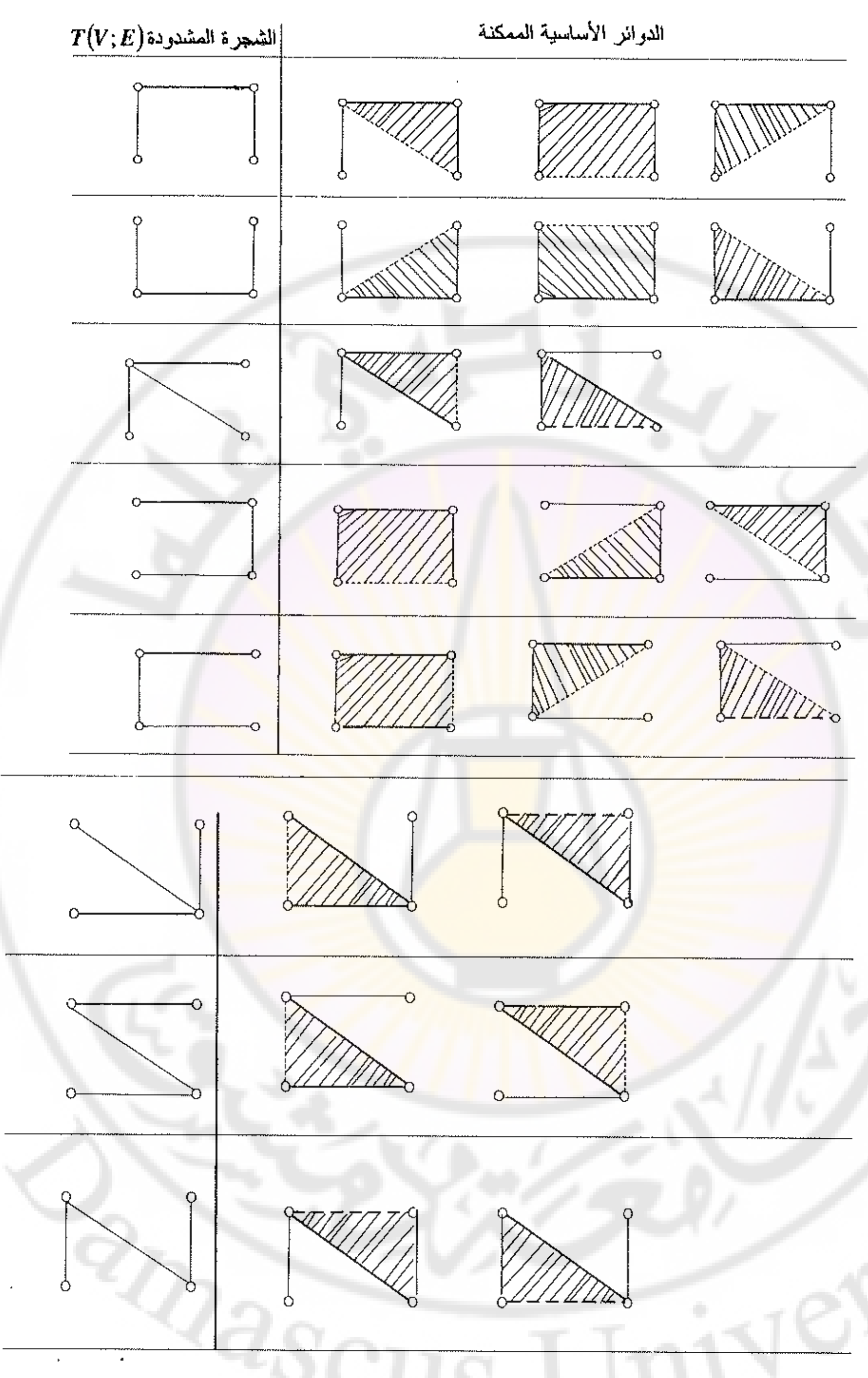
مثال :

ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ المبين بالشكل (14) ، إن $|V|=4$ و $|E|=5$



الشكل (14)

إن الخيارات الممكنة للدوائر الأساسية والشجرة T مشدودة على البيان $G(V;E)$:



الشكل (15)

4-خوارزمية إنشاء شجرة مشدودة

ليكن لدينا البيان المترابط $G(V;E)$ بياناً فمن أجل الحصول على شجرة مشدودة على البيان G نطبق الخطوات التالية:

الخطوة 1 : اختر أي عقدة $x_1 \in V$ وضع $V_1 = \{x_1\}$ و E_1 و $T_1(V_1;E_1)$.

الخطوة 2 : نفرض أننا قد أنشأنا البيان $T_j(V_j,E_j)$ من أجل $j=1,2,...,k$.

نوجد ضلعاً بحيث طرف الضلع العقدة $x_{k+1} \notin V_k$ عندئذ تكون مجموعة العقد $V_{k+1} = V_k \cup \{x_{k+1}\}$ فيكون مجموعة الأضلاع $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$ ويكون البيان $T_{k+1} = (V_{k+1} ; E_{k+1})$.

الخطوة 3 : كرر الخطوة (2) كلما أمكن ذلك.

مبرهنة (10)

ليكن لدينا البيان المترابط $G(V;E)$ فإن خوارزمية إنشاء شجرة مشدودة على البيان تعطي شجرة مشدودة على البيان G.

البرهان:

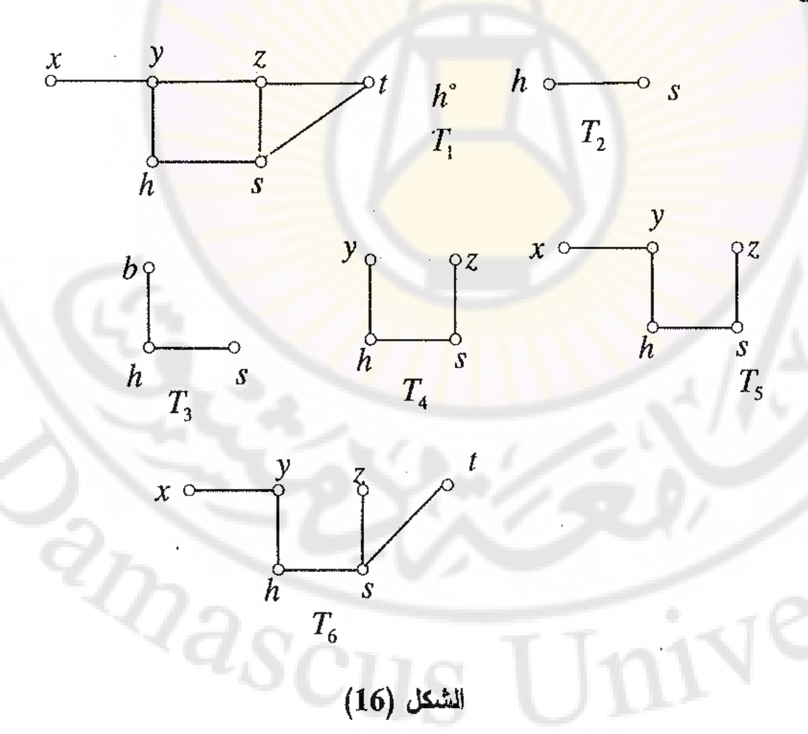
نفرض أنه تم تنفيذ الخوارزمية m خطوة. إذاً، نحصل على البيان $T_m = (V_m;E_m)$، ولنثبت أن البيان T_m شجرة مشدودة على البيان G. سنثبت أولاً أن T_m شجرة وذلك باستخدام الاستقراء الرياضي على n لإثبات أن: لكل عدد صحيح $1 \le n \le m$ فإن T_n شجرة، إذا كان $n=1$ فإن $E_1 = \phi$ وبالتالي، فإن $T_1(V_1;E_1)$ شجرة الآن نفرض أن $T_k = (V_k;E_k)$ شجرة حيث $1 \le k < m$ عدد صحيح. من الخطوة (2) في الخوارزمية إنشاء شجرة مشدودة نعلم أنه توجد عقدة $y \in V_k$ والعقدة $x_{k+1} \notin V_k$ بحيث $(y,x_{k+1}) = e_k \in E$، $V_{k+1} = V_k \cup \{x_{k+1}\}$، $E_{k+1} = E_k \cup \{e_k\}$ و $T_{k+1} = (V_{k+1};E_{k+1})$ بما أن الشجرة T_k لا تحتوي على دوائر فإن البيان T_{k+1} لا يحتوي على دوائر، إذاً فإن العقدة x_{k+1} تجاور العقدة $y \in V_k$ وبما أن T_k بيان مترابط فإن العقدة x_{k+1} مرتبطة

بجميع العقد المنتمية إلى V_k،إذاً T_{k+1} مترابط وبالتالي، فإن T_{k+1} شجرة، إذاً T_m شجرة. لنثبت أن البيان T_m شجرة مشدودة على البيان G. من أجل ذلك نثبت أن $m=|V|$. من الواضح أن $m\le|V|$ إذا كان $m<|V|$ فإنه توجد عقدة $x\in V$ بحيث $x\notin V_m$. لتكن العقدة $y\in V_m$ و بما أن البيان G بيان مترابط فإنه يوجد ممر $y_1,c_1,y_2,...,c_{r-1},y_r$ من العقدة y إلى العقدة x و ليكن $1\le j<r$ هو أكبر عدد صحيح بحيث $y_j\in V_m$، إذاً فإن $y_{j+1}\notin V_m$ و $(y_j,y_{j+1})=e_j$ إن هذا يتناقض مع الخطوة (3) في الخوارزمية وبالتالي، فإن $m=|V|$. وهو المطلوب

مثال:

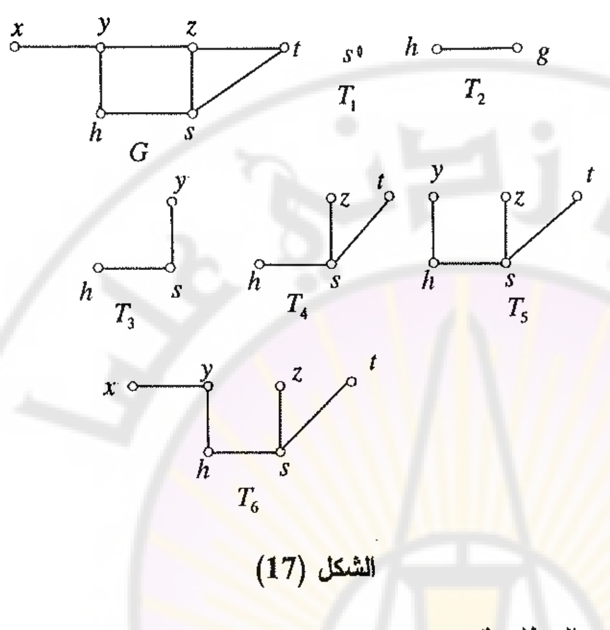
أوجد الشجرة المشدودة على البيان G المعطى فيَ المثال السابق مستخدماً الخوارزمية إنشاء شجرة مشدودة على البيان.

الحل:



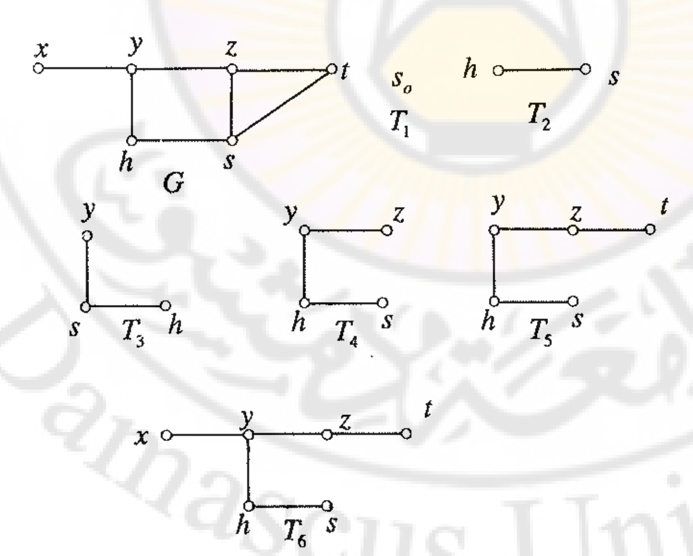
الشكل (16)

إذاً البيان T_6 شجرة مشدودة على البيان G. مع الملاحظة أنه توجد أشجار أخرى مشدودة على البيان G.أي نحصل على ما يأتي:



الشكل (17)

إن T_6 هي الشجرة المطلوبة.



الشكل (18)

إن T_6 هي الشجرة المطلوبة.

مبرهنة(11)

ليكن لدينا البيان البسيط المترابط $G(V;E)$ بحيث $|V|=n$ و $|E|=m$، علما أن m و n هي أعداد صحيحة موجبة، فإن عدد الطرق الممكنة لترقيم عقد البيان هي $2.\binom{n}{2}$ طريقة.

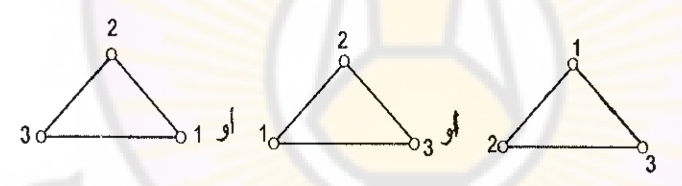
مثال :

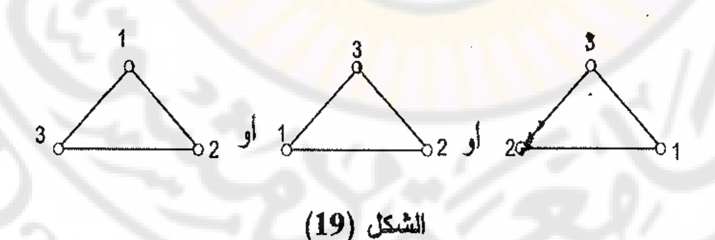
من أجل n=2 ، عندئذ يمكن ترقيم عقد البيان بطريقتين :

إما 2 ○———○ 1 أو 1 ○———○ 2

$$2.\binom{2}{2} = 2(1) = 2$$

من أجل n=3 فيمكن ترقيم عقد البيان بـــ $2.\binom{3}{2}$ طريقة وهي :





الشكل (19)

مبرهنة(12)

لتكن لدينا الشجرة $T=(V;E)$ ولتكن : $|V|=n$ عندئذ يمكن ترقيم عقد هذه الشجرة بـــ : n^{n-2} طريقة .

ملاحظة:

إن إضافة أي ضلع للشجرة المشدودة على البيان يؤدي الحصول على دائرة مغلقة واحدة فقط.

5- مبرهنة كيرشوف وترنيت (مبرهنة السقالة-المصفوفة)

ليكن لدينا البيان G الذي يملك n عقدة $x_1, x_2, \dots, x_n$ بحيث $n \geq 2$ ولتكن مصفوفة الإدخال لهذا البيان Q:

$$Q = V - A$$

ليكن i عدداً اختيارياً من مجموعة الأعداد $1,2,\dots,n$ ولتكن المصفوفة Q_i هي التي نحصل عليها من المصفوفة Q وذلك بعد أن نحذف السطر i والعامود i.

عندئذٍ يكون ما يلي محققاً: $|Q_i| = h(G)$ عدد السقالات في البيان المعطى.

ملاحظة:

إن قيمة المحدد مستقلة عن الحالات الخاصة للدليل i ومستقلة عن طريقة ترقيم العقد.

6- مسألة السقالة الأصغرية

ليكن لدينا n قرية (حياً) المطلوب إيجاد نظام اتصال (شبكة تليفون) يربط هذه القرى ببعضها بحيث أنه من أجل كل قريتين j و i يوجد اتصال مباشر أو غير مباشر حيث أن التكلفة L_{ij} لبناء اتصال مباشر.

أوجد الشبكة N تحقق الشروط التالية:

1-كل قريتين متصلتين مباشرة أو بوساطة طريق يمر بقرى أخرى من خلال قنوات الربط.

2-نقاط التفرغ متمركزة في القرى فقط وذلك ليتسنى لنا سهولة المراقبة الفنية والصيانة.

3-من بين كل الشبكات التي تحقق الشرطين الماضيين المطلوب اختيار الشبكة N التي تكلفتها أصغريه.

4-هذه المسألة شبيهة بمسألة السقالة الأصغرية: ليكن لدينا البيان البسيط المترابط، الذي يملك n عقدة ربط نزود كل ضلع في هذا البيان بعدد حقيقي مثل $L(e)$ حيث $e \in E$ أي $L(e)$ = طول الضلع e.

أوجد السقالة الأصغرية H التي طولها أصغري.

$$L(H) = \sum_{e \in H} L(e)$$

مبرهنة (13):

لتكن أطوال أضلاع البيان G مختلفة مثنى مثنى عندئذ يملك البيان G تماماً سقالة أصغرية واحدة وهذه السقالة الأصغرية نستطيع إيجادها وفق الخوارزمية التالية:

نكون متتالية منتهية من الأشجار $H_1, H_2, \ldots, H_n$ المحتواة في G وفق الطريقة التالية:

في حالة H_1 مكونة من عقدة واحدة اختيارية من البيان G الشجرة H_{v+1} حيث $1 \le v \le n-1$ وفق الطريقة التالية:

ليكن الضلع e_{v+1} الضلع الأقصر من بين أضلاع البيان G التي تشترك مع الشجرة H_v بعقدة واحدة فقط. نضيف هذا الضلع e_{v+1} للشجرة H_v بحيث يؤثر فقط بعقدة نهائية لم تعالج من قبل وهكذا نتابع عندئذ في النهاية نحصل على السقالة H_n وهي السقالة الأصغريه التي نبحث عنها.

إثبات أصغريه:

إذاً أعطتنا هذه الخوارزمية التي وضحناها سقالة G، ويستطيع المرء بشكل مباشر التأكد من ذلك بوساطة البرهان التدريجي.

الآن لتكن H السقالة الأصغرية للبيان G بحيث أن هذه السقالة تحقق ما يلي:

$H_n \not\subset H$ ووضوحاً $H_1 \subset H$ يوجد على الأقل دليل مثل μ بحيث أن $(1 \leq \mu < n)$ بحيث يكون:

$$H_\mu \subset H$$

$$H_{\mu+1} \not\subset H$$

عندئذٍ يوجد ضلع $\exists e_{\mu+1} \notin H$ الآن نضيف هذا الضلع لـ H فنحصل على:

$$H' = H + e_{\mu+1}$$

(إذاً الآن حصلنا على شجرة وضلع مضاف إليها) إذاً حصلنا على دائرة واحدة فقط c بما أن $H_{\mu+1}$ لا تملك دائرة يوجد على الدائرة c على الأقل ضلع مثل $e \in c$ بحيث يكون $e \notin H_{\mu+1}$ والضلع ذاته لا ينتمي للشجرة $e \notin H_\mu$.

بسبب الضلع e يوجد ضلع مثل e' الذي يؤثر في عقدة واحدة فقط من H_μ.

ملاحظة:

لا يمكن أن يكون العقدتان النهائيتان من H_μ لأن H_μ لا تملك دائرة.

ملاحظة:

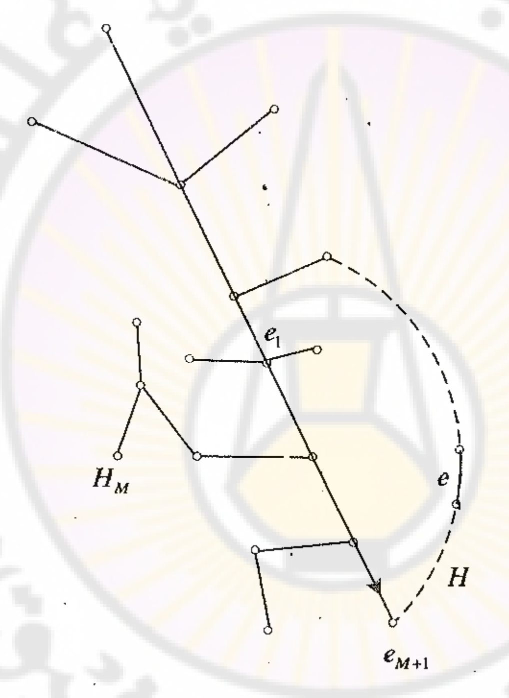
طول e' بالتأكيد موجود لأننا لو انطلقنا من p باتجاه السهم فلا نعود إلى p مرة ثانية. الضلع $e' \in H$ وإلا لما حصلنا على شجرة، أيضاً $e \in H$ ونلاحظ ببساطة من خلال الخوارزمية (من خلال البناء) أن طول الضلع:

$$L(e_{\mu+1}) < L(e')$$

نشكل H'' :

$$H''= H'-e'= H + e_{\mu+1} - e'$$

وبما أن العلاقة السابقة محققة عندئذٍ مجموع أطوال أضلاع السقالة H'' أصغر من مجموع أطوال أضلاع السقالة H أي وجدنا سقالة أصغر من التي فرضناها أصغرية وهذا تناقض.



الشكل (20)

ولو وجدت سقالة أصغرية فسوف تكون متطابقة مع H .

الوحدانية:

بما أن أطوال الأضلاع مختلفة مثنى مثنى وعدد سقالات البيان G منته إذاً يوجد سقالة أصغرية مجموع أطوال أضلاعها أصغري وهذه السقالة وحيدة ومثل هذه السقالة متطابقة مع H_n وهو المطلوب.

ملاحظة:

يحتوي البيان G على عدد من الأضلاع التي لها الطول نفسه ويكون الحل لهذه المسألة: نضيف للأطوال المتساوية زيادة صغيرة جداً عندئذ نحصل على بيان أطوال أضلاعه مختلفة.نترك الخوارزمية السابقة تحدد لنا السقالة الأصغرية مع الوضع في الحسبان أنه يجب أن نبقى محتفظين بأي ضلع أجرينا عليه الزيادة وما هي كميتها؟ بعد حصولنا على السقالة الأصغرية نحذف هذه الزيادة فنحصل على السقالة الأصغرية المطلوبة.

7-الأشجار المرتبة ذوات الجذور وتطبيقاتها

ORDERED ROOTED TREES AND ITS APPLICATION

تعريف:

لتكن لدينا الشجرة $T=(V;E)$. نختار أي عقدة $r \in V$ ونسميها جذر الشجرة T. نسمي T شجرة ذات جذر.

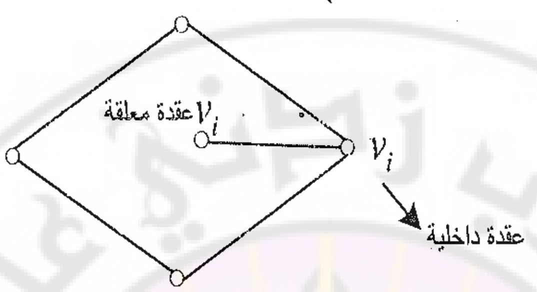
نعلم من المبرهنة (6) أن أي عقدتين في الشجرة T مرتبطتان بممر وحيد.

تعريف:

نعرف مستوى (أو عمق) العقدة $x \neq r$ على أنه طول الممر الوحيد الذي يربط العقدة x مع العقدة r ، و نعرف مستوى r على أنه الصفر، كذلك نعرف ارتفاع T على أنه العدد الأكبر بين جميع مستويات العقد.

تعريف:

إذا كانت العقدة $x \in V$ بحيث $x \neq r$ و $\deg(x) = 1$ فإننا نسمي x ورقة (عقدة معلقة pendent vertex). إذا كانت العقدة $y \in V$ ليس ورقة فإننا نسمي y عقدة داخلية(Internals vertex).



الشكل (21)

تعريف:

إذا كان p ممراً يصل بين عقدة داخلية وورقة فإننا نسمي p فرع.

تعريف:

لتكن العقدتين x و y عقدتين مرتبطين في الشجرة $T = (V;E)$ وليكن i هو مستوى العقدة x وليكن j هو مستوى العقدة y. إذا كان $i+1 = j$ فإننا نسمي العقدة y تابعاً مباشراً للعقدة x كما نسمي العقدة x مرجعاً مباشراً للعقدة y.

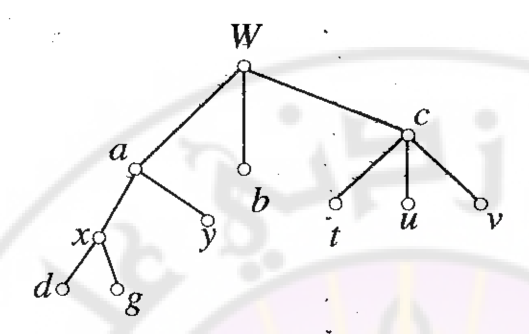
تعريف:

لتكن العقدة $a \in V$ في الشجرة $T = (V;E)$ ولتكن:

$D(a) = \{x \in V : a$ تابع للعقدة $x\} \cup \{a\}$ وليكن H هو البيان المولد بوساطة $D(a)$ في الشجرة T. نسمي (H,a) الشجرة الجزئية ذات الجذر a.

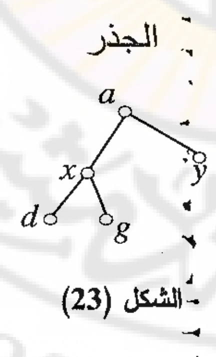
مثال :

لتكن لدينا الشجرة $T=(V;E)$ المعطاة في الشكل (22)



الشكل (22)

نختار العقدة w ونسميها جذراً فتصبح الشجرة T شجرة ذات جذر. إن مستوى t يساوي 2 بينما مستوى d يساوي 3. نلاحظ أن ارتفاع T يساوي 3. كذلك (d,g,b,t,u,v,y) هي مجموعة الأوراق. نلاحظ أن مستوى a يساوي 1 بينما مستوى x يساوي 2 كما أن العقدتين a و x مرتبطان، وبالتالي، فإن العقدة x تابع مباشر للعقدة a بينما العقدة a مرجع مباشر للعقدة x. من الشكل نجد أن الشجرة الجزئية التي جذرها a هي الشجرة في الشكل (23).



الشكل (23)

تعريف :

لتكن الشجرة $T=(V;E)$ شجرة ذات جذر، من أجل أي عقدة $x\in V$ نعرف المجموعة $M(x)$ كما يلي:

$|M(x)|=\{y$ تابع مباشر للعقدة $x : y\}$

أ- إذا كان $|M(x)|\leq 2$ من أجل أي عقدة $x\in V$ فإننا نسمي T شجرة ثنائية.

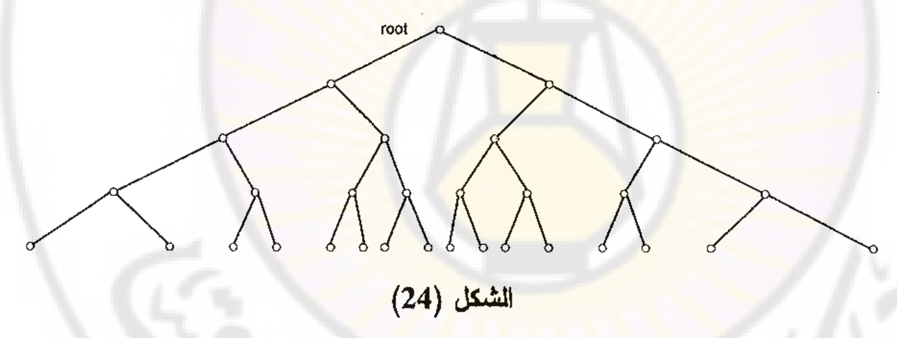
ب- وإذا كان $|M(x)|=2$ من أجل أي عقدة داخلية x فإننا نسمي t شجرة ثنائية منتظمة.

ملاحظة:

للشجرة الثنائية تطبيقات في مختلف العلوم وخاصة في مجال علوم الحاسوب وفي مجال نظرية القرار.

تعريف :

الشجرة الثنائية (Binary tree) هي عبارة عن شجرة قدرة جذرها 2 وقدرة أي عقدة داخلية فيها تساوي 3 وقدرة العقد المعلقة هو 1



الشكل (24)

مبرهنة(14)

لتكن لدينا الشجرة الثنائية $T=(V;E)$ حيث $|V|=n$, $|E|=m$، فإن عدد عقدها n عدد فردي .

الإثبات :

أولا: إن جميع عقد هذه الشجرة قدرتها عدد فردي ما عدا قدرة الجذر وبالتالي توجد عقدة واحدة فقط في هذا البيان قدرتها عدد زوجي وباقي عقد هذا البيان قدراتها أعداد فردية.

إن عدد العقد في الشجرة الثلاثية التي قدراتها أعداد فردية هو عدد زوجي ولدينا عقدة هي الجذر وقدرتها عدد زوجي، إذاً :

(m) عدد زوجي + (1) الجذر= عدد فردي.

ثانياً: عدد عقد الجذر (root) = 1 وقدرتها = 2 .

إن العقد الداخلية وليكن عددها = k فإن قدرتها تساوي 3k (قدرة أي عقدة داخلية هو 3) ، عندئذ ويكون عدد العقد المعلقة هو (k +1) – m وقدرة هذه العقد المعلقة (n –(k +1

نجمع قدرات عقد الشجرة الثلاثية $T = (V;E)$ فنحصل:

$$2+3k + m - (k +1)$$

هذا العدد يساوي ضعف عدد أضلاع الشجرة (لأن كل ضلع في الشجرة يربط بين عقدتين فقط حيث لا يوجد في الشجرة عرى ولا يوجد أضلاع مضاعفة وبالتالي عند عملية جمع قدرات العقد فإن الضلع سيتكرر جمعه مرتين)

وإن عدد أضلاع أي شجرة هو : n-1

$$\Rightarrow 2+ 3k + m- (k +1) = 2(n-1)$$

$$2+ 3k+ m - k-1 = 2n - 2 \Rightarrow 2k + m+1 = 2n - 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad n = 2k + 3$$

إذاً n عدد فردي. وهو المطلوب .

مبرهنة (15)

لتكن لدينا الشجرة الثنائية $T=(V;E)$ عدد عقدها، فإن عدد العقد المعلقة في هذه الشجرة هو :

$$\frac{1}{2}(n+1)$$

الإثبات:

إذا كانت $T=(V;E)$ شجرة ثنائية بحيث $|V|=n$ ، فإن $|E|=n-1$
لنفرض أن m هو عدد العقد المعلقة في الشجرة $T=(V;E)$ ، عندئذ :
عدد العقد الداخلية في الشجرة $T=(V;E)$ هو $n-(m+1)$ وتكون قدرة هذه العقد هي : $3*(n-(m+1))$
عدد العقد المعلقة هو m (كما فرضناه) وتكون قدرة هذه العقد هو m ، قدرة الجذر 2 ، ونعلم أنه إذا جمعنا قدرات عقد الشجرة $T=(V;E)$ فإن هذا المجموع يساوي إلى ضعف عدد أضلاع الشجرة

$$2*(n-1) = 3*(n-m-1)+m+2$$

$$\Rightarrow \quad 2n-2 = 3n-3m-3+m+2$$

$$\Rightarrow \quad 2n-2 = 3n-2m-1$$

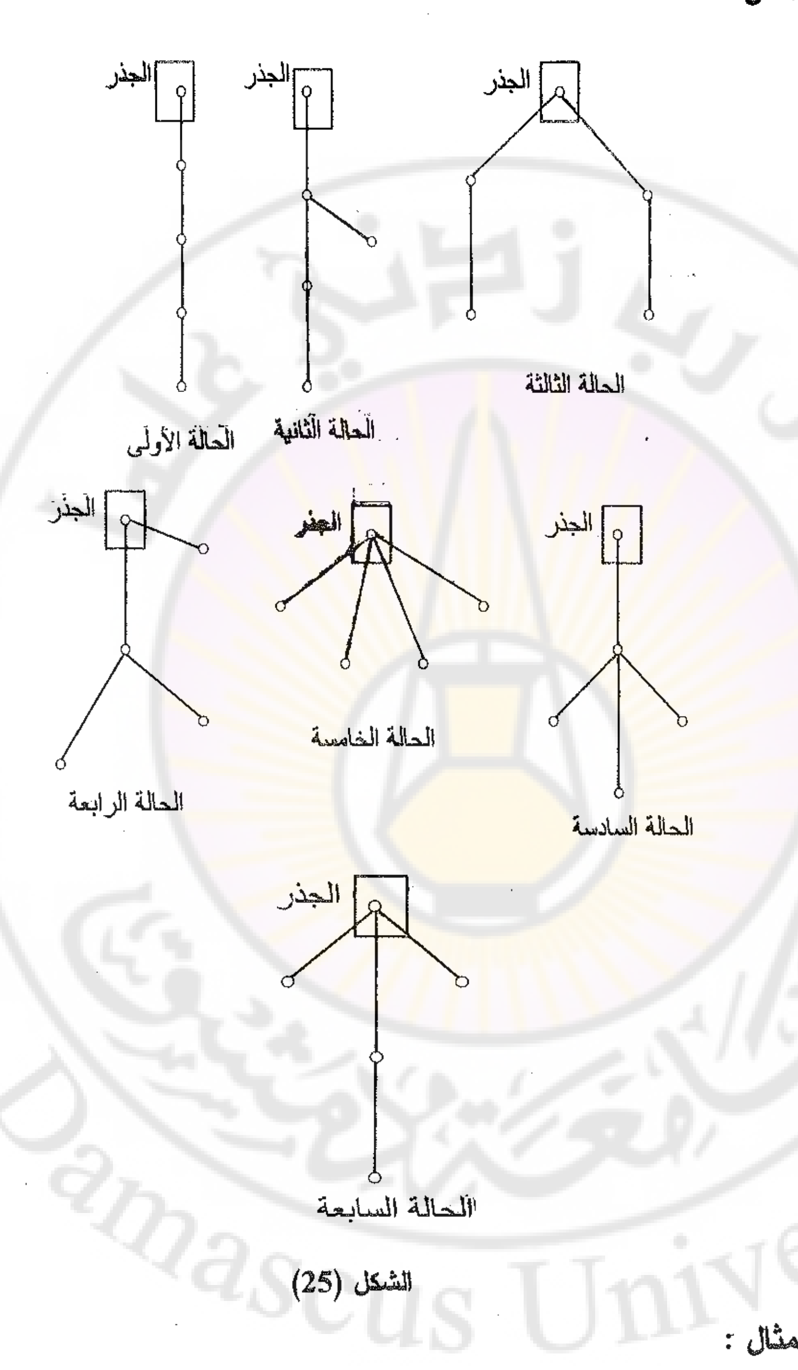
$$2m = n+1 \Rightarrow m=\frac{1}{2}(n+1)$$

وبالتالي يكون عدد العقد المعلقة في الشجرة الثنائية $T=(V;E)$ هو $\frac{1}{2}(n+1)$. وهو المطلوب

مثال:

أكتب أو بيّن الحالات الممكنة لشجرة مكونة من 4 عقد وجذر واحد

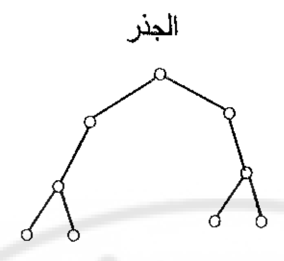
الحل :



الشكل (25)

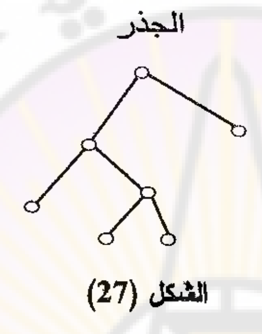
مثال :

أ- إن البيان في الشكل (26) يمثل شجرة ثنائية:



الشكل (26)

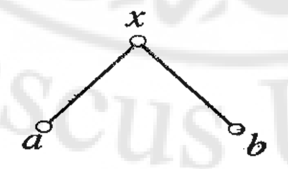
ب- إن البيان في الشكل (27) يمثل شجرة ثنائية منتظمة:



الشكل (27)

تعريف :

لتكن الشجرة $T=(V;E)$ شجرة ذات جذر ، فإذا كانت المجموعة $M(x)$ مجموعة مرتبة كلياً من أجل أي عقدة داخلية x فإننا نسمي T شجرة مرتبة ذات جذر. إذا كانت T شجرة ثنائية مرتبة وكانت المجموعة $M(x)=\{a,b\}$ وكان $a\leq b$ بحيث $\leq$ هي علاقة الترتيب الكلي على المجموعة $M(x)$ فإننا نسمي العقدة a التابع المباشر الأيسر للعقدة x كما نسمي العقدة b التابع المباشر الأيمن للعقدة x، وفي الشكل الذي يمثل T نبين العقدتين a و b كما يلي:



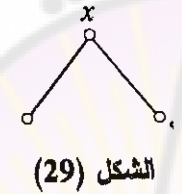
الشكل (28)

8- أشجار البحث الثنائية

BINARY SEARCH TREES

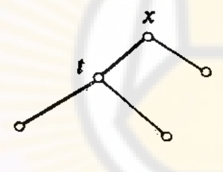
لتكن لدينا المجموعة A مجموعة منتهية معرف عليها علاقة ترتيب كلي $\le$.
ننشئ شجرة ثنائية مرتبة $T(A)$ كما يلي:

نختار أي عنصر من A ونسميه الجذر. إذا كان r هو الجذر فإن الشكل(29) يبين ذلك:



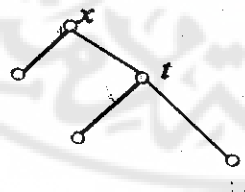
الشكل (29)

ثم نأخذ عنصراً من $A-\{r\}$ وليكن t. إذا كان $t \le r$ فإن الشكل (30) يبين ما يلي:



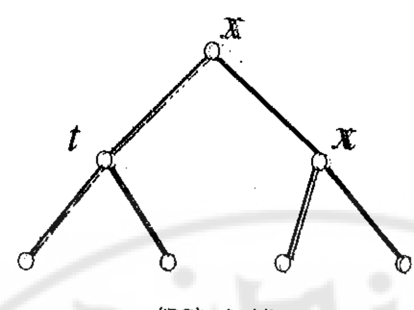
الشكل (30)

أما إذا كان $r \le t$ فإن الشكل (31) يبين ما يأتي:



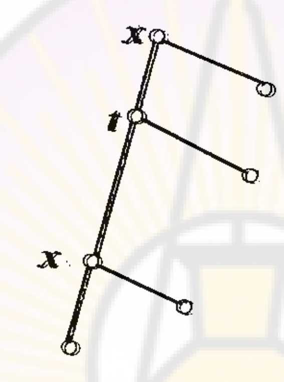
الشكل (31)

لنفرض أن $t \le r$ الآن نأخذ عنصراً من $A-\{r,t\}$ وليكن x. إذا كان $r \le x$ فإننا نحصل على الشكل (32).



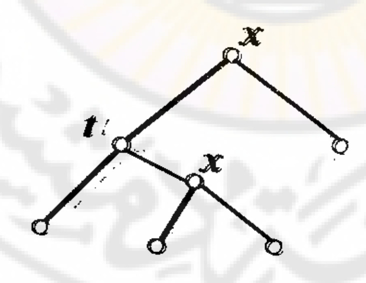
الشكل (32)

أما إذا كان $r \le x$ فإننا نقارن x مع t. إذا كان $t \le x$ فإن الشكل (33) يبين ما يأتي:



الشكل (33)

أما إذا كان $x \le t$ فإن الشكل (34) يبين ما يأتي:



الشكل (34)

نكرر هذه العملية على العناصر الباقية من A بحيث نبدأ عملية المقارنة دائماً من الجذر r. بما أن المجموعة A مجموعة منتهية فإنه لابد لهذه العملية أن

تتوقف بعدد عدد منته من الخطوات فنحصل على شجرة ثنائية مرتبة $T(A)$. تسمى $T(A)$ شجرة بحث ثنائية للمجموعة A. إذا كانت $A \subseteq B$ وكانت $\leq$ علاقة ترتيب كلي على B أيضاً فإنه يمكن الحصول على شجرة بحث ثنائية $T(B)$ بسهولة عن طريق تمديد شجرة بحث ثنائية $T(A)$ كما يأتي:

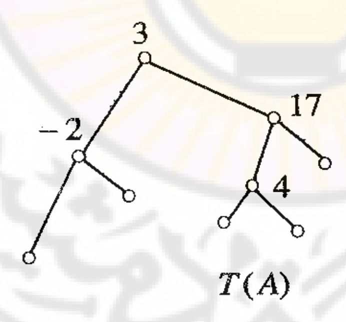
ليكن $b \in B$ ونجري عملية المقارنة مبتدئين من r فنتبع فرعاً يقودنا إلى إضافة b إلى الشكل.

مثال:

لتكن لدينا $A = \{17,-2,3,4\}$ أوجد شجرة البحث الثنائية $T(A)$ للمجموعة A ثم أضف -5 ثم أضف 1 إلى $T(A)$ بحيث العلاقة $\leq$ هي علاقة الترتيب الكلي على الأعداد.

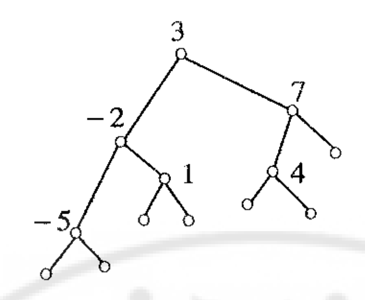
الحل:

نختار 3 كجذر ثم نضيف -2 ثم نضيف 17 ثم نضيف 4 فنحصل على الشجرة في الشكل (35)



الشكل (35)

الآن نضيف -5 ثم نضيف 1 فنحصل على الشجرة في الشكل (36)



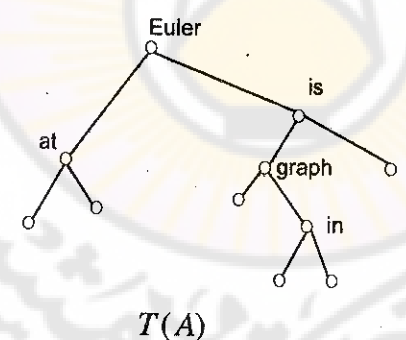
الشكل (36)

مثال :

لتكن لدينا المجموعة $A=\{Euler, graph, is, in, at\}$ أوجد شجرة البحث الثنائية $T(A)$ للمجموعة A ثم أضف *Ali* ثم أضف *computer* إلى $T(A)$ حيث العلاقة $\leq$ هي علاقة الترتيب المعجمي على الكلمات.

الحل:

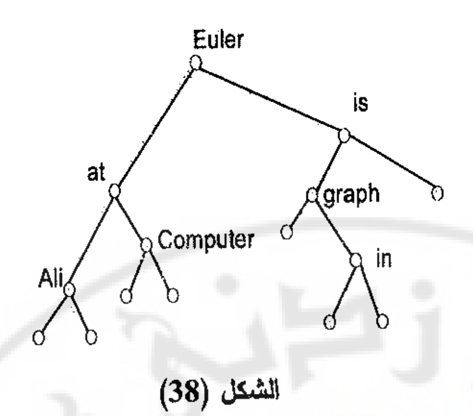
نختار *Euler* جذراً ثم نضيف *graph,at,is* و *in* على الترتيب فنحصل على الشجرة في الشكل (37)



$T(A)$

الشكل (37)

الآن نضيف *Ali* ثم نضيف *comuter* فنحصل على الشجرة في الشكل (38)



الشكل (38)

9-قطر البيان

ليكن لدينا البيان البسيط المترابط $G=(V;E)$ غير خالي بحيث $|V|=n$ و $|E|=m$ ،ولتكن $v \in V$.

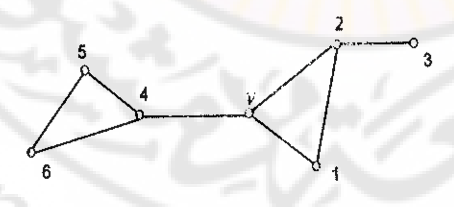
تعريف :

تطرف (eccentricity) العقدة v هو أبعد مسافة عن هذه العقدة ونرمز له بـ $e(v)$.

$$e(v)=\max\{d(v,u):u\in V\}$$

مثال:

ليكن لدينا البيان التالي:



الشكل (39)

أوجد تطرف العقدة v: نحسب $d(v,i)$ حيث i = 1,2,3,4,5,6: فنجد أن:

$d(v,1)=1$ و $d(v,2)=1$ و $d(v,3)=2$ و $d(v,4)=1$

و $d(v,6) = 2$ و $d(v,5) = 2$

$$e(v) = \max\{1,1,2,1,2,2\} = 2$$

تعريف:

القطر الداخلي(internal radius in graph) للبيان وهو أصغر تطرف لعقد البيان أي:

$$r(G) = \min\{e(v) : v \in V\}$$

مثال :

أوجد القطر الداخلي للبيان السابق.

نوجد تطرف جميع عقد البيان ثم نأخذ أصغر تطرف فنجد :

$e(1) = 3$, $e(2) = 3$, $e(3) = 4$, $e(4) = 3$

$e(v) = 2$, $e(5) = 4$ $e(6) = 4$

$$r(v) = \min\{e(v)\} = \min\{3,3,4,3,2,4,4\}$$

$$\Rightarrow r(v) = 2$$

تعريف:

القطر الخارجي (external radius in graph) في بيان هو أعظم تطرف للعقد في بيان $G(v,E)$ ونرمز له بـ $d(v)$:

$$d(G) = \max\{e(v) : v \in V\}$$

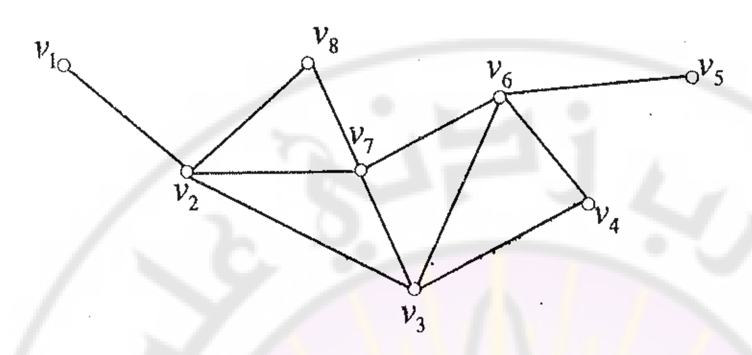
مثال :

أوجد القطر الخارجي للبيان السابق :

$$d(G) = \max\{e(v) : v \in V\} = 4$$

مثال :

ليكن لدينا البيان التالي :



الشكل (40)

أوجد القطر الداخلي والقطر الخارجي لهذا البيان

الحل:

$$e(v_1)=4 \;,\; e(v_2)=3 \;,\; e(v_3)=3 \;,\; e(v_4)=3 \;,\; e(v_5)=4$$

$$e(v_6)=3 \;,\; e(v_7)=2 \;,\; e(v_8)=3$$

$$\Rightarrow r(G)=2$$

$$d(G)=4$$

تعريف:

العقدة المركزية أو عقدة نواة هي عقدة تحقق الشرط التالي :

$$e(v)=r(G)$$

أي القطر الداخلي للبيان G = تطرف العقدة v

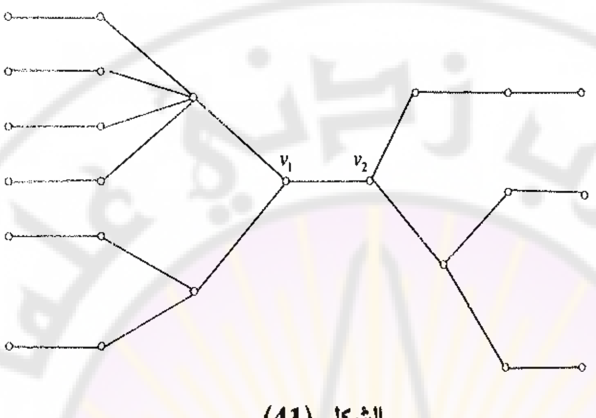
تعريف :

مركز (نواة) البيان هو مجموعة العقد الجزئية $\Gamma=\{v_i,v_{i+1},.........,v_j\}$ من مجموعة عقد البيان التي تحقق العلاقة:

$e(v_p) = r(G)$ من أجل أي عقدة من المجموعة الجزئية.

مثال :

لتكن لدينا الشجرة $T(V;E)$ التالية :



الشكل (41)

إن العقدة v_1 والعقدة v_2 عقدتان مركزيتان حيث لدينا:

$$e(v_1) = e(v_2) = 4$$
$$= r(G)$$

مثال :

لتكن لدينا البيان الشجرة $G = (V;E)$، فإنها تملك عقدة مركزية واحدة أو عقدتين مركزيتين على الأكثر.

الحل :

نستخدم الاستقراء الرياضي:

1- من أجل $|r| = 1$، فإن $|E| = 0$ عندئذ:

فأن $e(v) = r(G) \Leftarrow v$ عقدة مركزية (العقدة الوحيدة في البيان G)

2- من أجل $|r| = 2 \Leftarrow |E| = 1$ ، عندئذ:

$$e(v_1) = e(v_2) = r(G) = 1$$

إذاً كل من العقدتين v_1 و v_2 هي عقد مركزية ومنه القضية تكون صحيحة في هذه الحالة .

من أجل : $|r| = n \geq 2$ ، عندئذ يكون $|E| = n - 1$ ، لأن البيان المعطى هو الشجرة $T(r, E)$:

ولنحذف عقده معلقة من هذه الشجرة فنحصل على الشجرة $T'(r', E')$ حيث يكون فيها:

(حيث أن v هي عقدة معلقة في الشجرة T) $V' = V - \{v\}$

(حيث أن e هو ضلع معلق في الشجرة T) $E' = E - \{e\}$

إذا فإن $T' \subset T$ وبالتالي فإن تطرف أي عقدة في الشجرة 'T هو أصغر من تطرف أي عقدة في الشجرة T أي أنّ :

$$\forall v \in T', \forall u \in T \quad ; \quad e(v) \leq e(u)$$

ولكن نعلم أن الشجرتين T و 'T لهما نفس المركز (النواة) (لأنه لو حذفنا أي عقدة فلا يتغير موقع النواة وبالتالي نترك الشجرة T وندرس الشجرة 'T)

نحذف عقدة معلقة من الشجرة 'T فنحصل على الشجرة ''T ويكون:

$$T'' \subset T'$$

وإن الشجرتين 'T و ''T لهما نفس المركز. إن تطرف أي عقدة من الشجرة ''T هو أصغر تماماً من تطرف أ ي عقدة في الشجرة 'T. وهكذا نتابع حتى نحصل : إما على الحالة الأولى أو على الحالة الثانية، أي أن الشجرة تملك عقدة مركزية واحدة على الأقل وعقدتين مركزيتين على الأكثر.

إن الشجرة تحوي عقدتين مركزيتين وبالتالي نجد أن تلك القضية صحيحة من أجل المثال السابق.

10- مصفوفة الدوائر

تعريف:

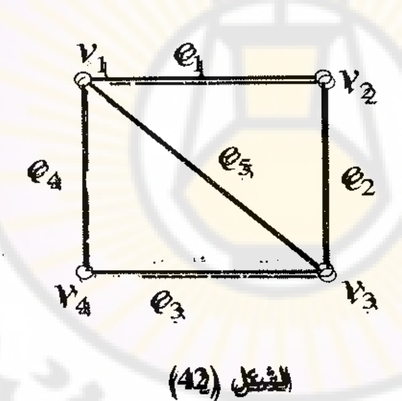
ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بحيث $|V|=n$ و $|E|=m$ فإن مصفوفة الدوائر في البيان G هي المصفوفة التي تمثل الدوائر الممكنة في البيان ونرمز لهذه المصفوفة بالرمز : $C(G)=(c_{ij})$ أبعاد هذه المصفوفة هو عدد الدوائر الممكنة في البيان $G=(V;E)$ ضرب عدد الأضلاع.

نعرف عناصر مصفوفة الدوائر $C(G)$ كما يلي :

$$C(G)=c_{ij} \quad , \quad c_{ij}=\begin{cases}1 & ,iff\ e_i \in C_i(G) \\ 0 & ,otherwes\end{cases}$$

مثال :

أوجد مصفوفة الدوائر للبيان التالي :



الشكل (42)

الحل :

إن الدوائر الممكنة في البيان:

$C_1(G)=\langle e_1,e_2,e_5\rangle=z_1$ (أول دائرة)

$C_2(G)=\langle e_3,e_4,e_5\rangle=z_2$ (ثاني دائرة)

$C_3(G)=\langle e_1,e_2,e_3,e_4\rangle=z_3$ (ثالث دائرة)

ولا يوجد دوائر أخرى في هذا البيان

$$C(G) = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ z_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ z_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ z_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

خواص مصفوفة الدوائر:

1-العمود الذي جميع عناصره أصفار فإن هذا يعني أن الضلع المقابل له لا ينتمي إلى أي دائرة.

2-مجموع عناصر أي سطر يقابل عدد الأضلاع المكوّنة للدائرة الموافقة .

3-التبديل بين أي سطرين يعني التبديل بين ترقيم الدوائر الموافقة.

4-التبديل بين أي عمودين يعني التبديل بين ترقيم الأضلاع المقابلة.

ملاحظة :

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ بحيث $|V|=n$ و $|E|=m$، ولتكن $C(G)$مصفوفة الدوائر لهذا البيان ولتكن B مصفوفة التأثير لهذا البيان عندئذ تكون العلاقات التالية صحيحة:

$$B(G)*C^T(G) = o \bmod 2$$
$$C(G)*B^T(G) = o \bmod 2$$

أي أن ناتج جداء مصفوفة التأثير بمنقول مصفوفة الدوائر لبيان ما مثل G هو مصفوفة عناصرها إما أصفار أو أعداد تقبل القسمة على 2 دون باقي. وكذلك جداء مصفوفة الدوائر بمنقول مصفوفة التأثير هو مصفوفة عناصرها إما أصفار أو أعداد قابلة للقسمة على 2 دون باقي .

مثال :

إذا طبقنا ذلك على المثال السابق نجد :

$$B(G)*C^T(G)=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}_{4*5}*\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}_{5*3}$$

$$=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&0&2\\2&2&2\\0&2&2\end{bmatrix}_{4*3}=o\bmod$$

إما صفر أو عدد يقبل القسمة على 2 دون باقي

وكذلك الحالة الثانية فإن :

$$C(G)*B^T(G)=\begin{bmatrix}2&2&2&0\\2&0&2&2\\2&2&2&0\end{bmatrix}=o\bmod 2$$

إن المصفوفة الناتجة هي منقول المصفوفة السابقة .

11- مصفوفة الدوائر الأساسية

ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ بحيث $|V|=n$ و $|E|=m$، ولتكن $C_f(G)$ مصفوفة الدوائر الأساسية في البيان $G=(V;E)$ ، أسطرها تمثل الدوائر الأساسية في البيان $G=(V;E)$ وأعمدتها تمثل أضلاع البيان $G=(V;E)$.

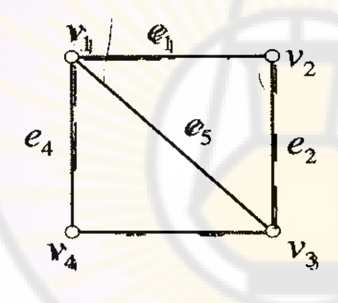
نعرف عناصر مصفوفة الدوائر الأساسية كما يلي:

$$c_{f_{ij}} = \begin{cases} 1 & ,if\ e_j \in Z_i \\ 0 & ,otherwes \end{cases}$$

أي أن قيمة $C_{f_{ij}}$ هي 1 إذا كان الضلع e_j ينتمي للدائرة الأساسية الموافقة Z_i و 0 خلاف ذلك. لنفرض أن $C_f(G)$ هي مجموعة جميع الدوائر الأساسية في البيان ولتكن μ هو قدرة هذه المجموعة أي: $\mu = |\Omega(C_f(G))|$ فإن أبعاد هذه المصفوفة هو $\mu * m$ حيث $\mu = m - n + 1$ علما أن n عدد العقد و m عدد الأضلاع

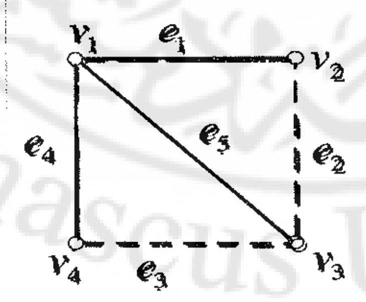
مثال:

ليكن البيان المبين بالشكل (43):



الشكل (43)

ولنأخذ الشجرة المشدودة على البيان وفق ما يلي:



الشكل (44)

عدد الدوائر الأساسية في هذا البيان يساوي عدد الأوتار ويساوي 2.

إن الدوائر الأساسية هي:

$$Z_1 \equiv < e_1, e_2, e_5 >$$

$$Z_2 \equiv < e_3, e_4, e_5 >$$

إن مصفوفة الدوائر الأساسية هي:

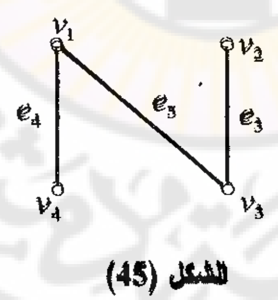
$$\Rightarrow C_f(G) = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ z_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ z_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix}$$

(أجرينا تبديل بين العمودين e_2 و e_1)

فإذا رسمنا البيان الموافق للمصفوفة: $C_+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ فنجده بيان جزئي يملك أربع عقد و 3 أضلاع و يمثل شجرة مشدودة على البيان.



الشكل (45)

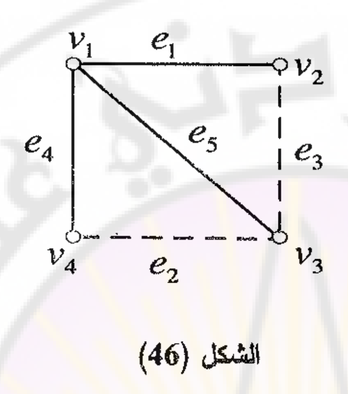
ملاحظة:

بإجراء تبديل بين الأعمدة نحصل على مصفوفة لها الشكل التالي:

$$C_f = [I_\mu \vdots C_+]$$

حيث أن I_μ هي مصفوفة الوحدة من البعد: $\mu * \mu$ حيث أن μ عدد الدوائر الأساسية، أما C_+ فهي مصفوفة الدوائر أبعادها: (m-n+1)*(n-1)

ولنطبق ذلك على المثال السابق:



الشكل (46)

ملاحظة:

إن رتبة مصفوفة الدوائر الأساسية هي أصغر أو تساوي: m-n+1

أي أن:

$$rank(C_f(G)) \leq m - n + 1$$

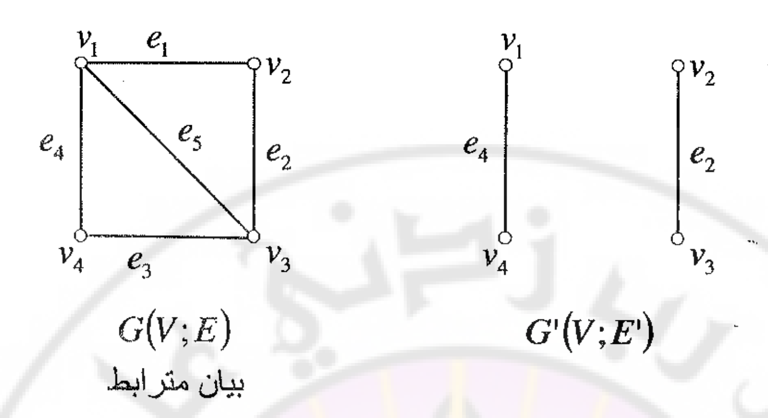
12- مجموعة القطع Cut – Set

ليكن لدينا البيان البسيط المترابط $G = (V;E)$ بحيث $|V| = n$ و $|E| = m$، فإن مجموعة القطع $ هي مجموعة الأضلاع التي إذا حذفناها من البيان $G = (V;E)$ نحصل على بيان غير مترابط $G - \$ = (V;E')$.

ملاحظة:

يوجد أكثر من مجموعة قطع في البيان.

مثال:

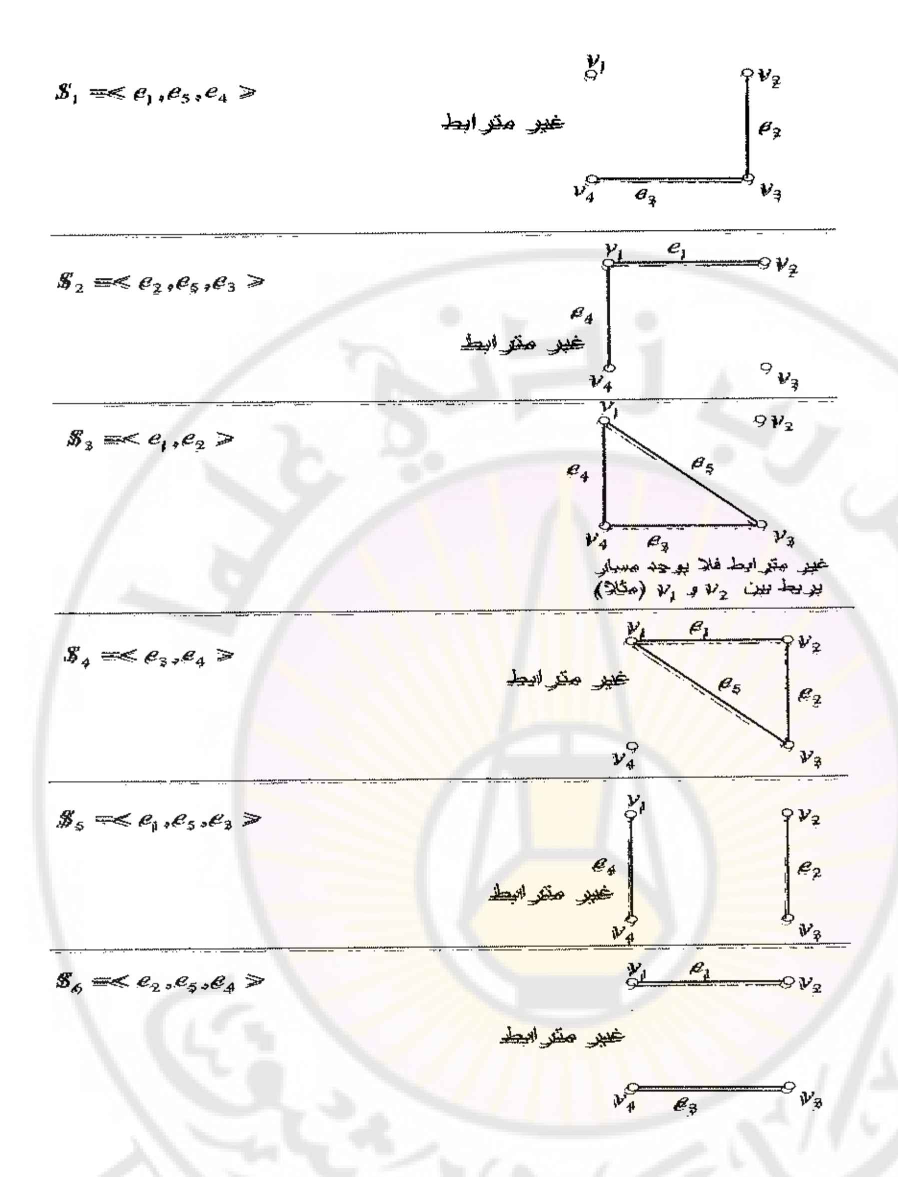


الشكل (47)

إذا إن مجموعة القطع هي:

$$\$ = < e_1, e_3, e_5 >$$

إن مجموعات القطع الممكنة في البيان هي:



الشكل (48)

13- مصفوفة مجموعات القطع

ليكن لدينا البيان $G=(V;E)$ و $|V|=n$ و $|E|=m$، فإن مصفوفة مجموعات القطع هي مصفوفة أسطرها تقابل مجموعات القطع وأعمدتها تقابل

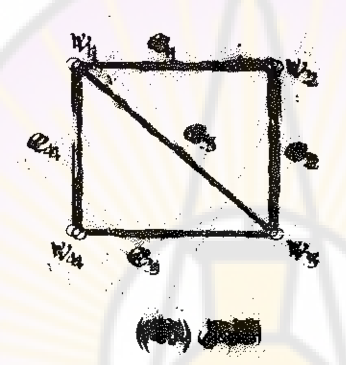
أضلاع البيان ونرمز لها بالرمز بـ $K(G)=(k_{ij})_{v*m}$ حيث v عدد مجموعات القطع في البيان $G=(V;E)$.

نعرف عناصر مصفوفة مجموعات القطع وفق ما يلي:

$$k_{ij}=\begin{cases}1 .... iff\ e_j \in S_i \\ 0 .... otherwes\end{cases}$$

مثال:

أوجد مصفوفة القطع للبيان الآتي:



الشكل ([illegible])

يوجد في البيان المعطى 6 مجموعات قطع وهي:

$S_1=<e_1,e_5,e_4>$, $S_2=<e_1,e_2>$

$S_3=<e_2,e_5,e_3>$, $S_4=<e_3,e_4>$

$S_5=<e_1,e_5,e_3>$, $S_6=<e_2,e_5,e_4>$

وبالتالي:

$$K(G)=\begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

تعريف:

مجموعة القطع الأساسية هي أصغر مجموعة من الأضلاع إذا حذفت من البيان $G=(V;E)$ نحصل على بيان غير مترابط وتحتوي هذه المجموعة ضلع واحد فقط من الشجرة المشدودة على البيان وبقية أضلاع هذه المجموعة أوتار.

14- مصفوفة مجموعات القطع الأساسية

هي مصفوفة بعدها يساوي $\mu * m$ حيث أن m عدد أضلاع البيان و μ عدد مجموعات القطع الأساسية الموجودة في البيان نرمز لها بـ $k_f(G)$

خواص مصفوفة مجموعات القطع

1-مجموع عناصر سطر تمثل عدد أضلاع مجموعة القطع

2-العمود الذي جميع عناصره أصفار هو ضلع لا ينتمي لأي مجموعة قطع

خواص مصفوفة القطع الأساسية:

عند إجراء تبديلات على مصفوفة القطع الأساسية بين الأسطر والأعمدة نحصل مصفوفة من الشكل:

$$k_f(G)=[D' \;\; : \;\; T]$$

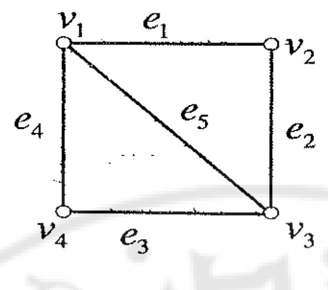
حيث أن 'D هي مصفوفة أعمدتها تمثل الأوتار ومجموع عناصرها وفق الأعمدة يمثل عدد تكرارات الوتر في مجموعات القطع الأساسية و T هي مصفوفة الوحدة، تمثل الشجرة المولدة على البيان المعطى.

ملاحظة

إن تكرار الأوتار في مصفوفة القطع الأساسية هي دوماً أعداد زوجية.

مثال:

إذا كان لدينا البيان المعطى بالشكل (50).



الشكل (50)

إن مجموعات القطع الأساسية في هذا البيان هي:

$$\$_1 =< e_1, e_2 > \qquad , \qquad \$_2 =< e_2, e_5, e_3 >$$

$$\$_3 =< e_3, e_4 >$$

إن مصفوفة مجموعات القطع الأساسية هي:

$$k_f(G) = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \$_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \$_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \$_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

بالتبديل بين العمود الأول والثالث ، و بين العمود الرابع والخامس نحصل على المصفوفة التالية:

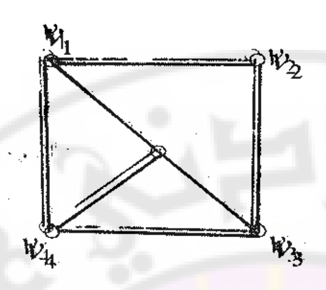
$$k_f(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف:

البيان المرافق هو بيان عقده تقابل المناطق في البيان الأصلي وأضلاعه تمثل الحدود الفاصلة بين مناطق البيان الأصلي.

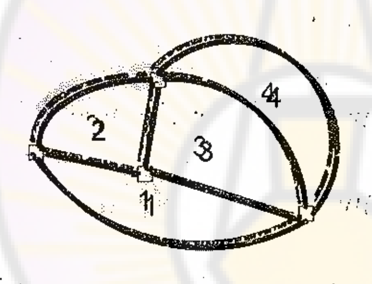
مثال:

ليكن لدينا البيان الآتي:



الشكل (51)

البيان المرافق هو البيان الآتي:



الشكل (52)

ملاحظة:

إن عدد مجموعات القطع في البيان الأصلي تساوي عدد الدوائر في البيان المرافق.

ملاحظة:

إن البيان المرافق للبيان المرافق هو البيان الأصلي

ملاحظة:

إن عدد المناطق في البيان المرافق تساوي عدد مجموعات القطع الأساسية.

15- مصفوفة المسارات

تعريف:

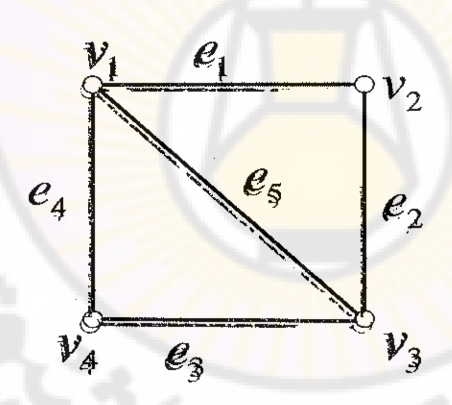
مصفوفة المسارات هي مصفوفة أسطرها المسارات الممكنة بين العقدتين المختارتين في البيان وأعمدتها أضلاع البيان ونرمز لها بـ $P(G) = (p_{ij})_{p*m}$

حيث أن p هو عدد المسارات الممكنة بين العقدتين المختارتين؛ v_i و v_j وبالتالي:

$$p_{ij} \equiv \begin{cases} 1 ....if\ e_j \in path(i) \\ 0 ....otherwes \end{cases}$$

مثال:

ليكن لدينا البيان



الشكل (53)

أوجد مصفوفة المسارات بين العقدتين V_1 و V_3

الحل:

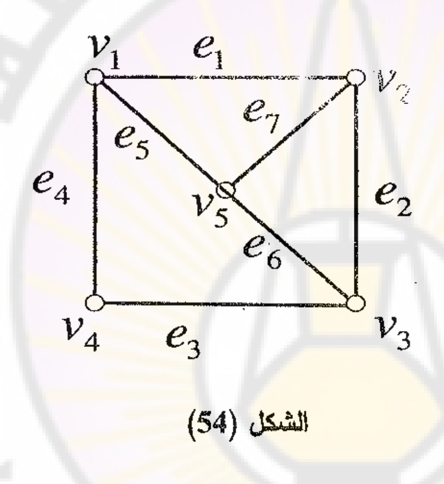
بين العقدتين V_1 و V_3 يوجد لدينا المسارات التالية:

$p_1 =< e_1, e_2 >$, $p_2 =< e_5 >$, $p_3 =< e_4, e_3 >$

$$\Rightarrow p_{v_1,v_2}(G) = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال:

ليكن لدينا البيان المعطى بالشكل (54) التالي:



الشكل (54)

أوجد ما يلي:

- عدد السقالات في البيان G.
- أوجد مصفوفة التأثير في هذا البيان.
- أوجد مصفوفة الدوائر والدوائر الأساسية في هذا البيان.
- أوجد مصفوفة القطع والقطع الأساسية في هذا البيان.
- أوجد مصفوفة المسارات بين العقدتين v_1 و v_3.

16- مصفوفة الدوائر في البيان الموجه

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}(r,\bar{E})$ ، إن مصفوفة الدوائر في البيان الموجه $\vec{G}(r,\bar{E})$ هي المصفوفة $C(\vec{G})=(c_{ij})_{\substack{i=1:n\\ j=1:p}}$ حيث p هو عدد الدوائر في البيان الموجه.

جهة للدوران:

نعتبر الدوران عكس عقارب الساعة هو الاتجاه الموجب والدوران مع عقارب الساعة هو الاتجاه السالب.

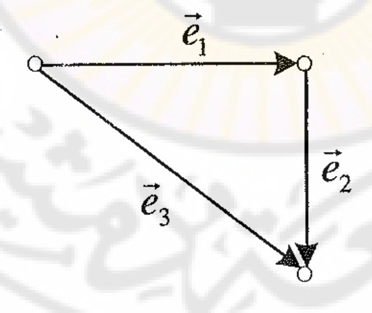
ملاحظة:

نعرف عناصر مصفوفة الدوائر في البيان الموجه $\vec{G}(r,\bar{E})$ كما يلي:

إذا كان الضلع $\vec{e}_j$ ينتمي للدائرة وجهته ضمن الدائرة بعكس عقارب الساعة (أي بالاتجاه الموجب) فإن قيمة c_{ij} هي 1 وإذا كان الضلع $\vec{e}_j$ ينتمي للدائرة وجهته ضمن هذه الدائرة مع جهة دوران عقارب الساعة (أي باتجاه سالب) فإن قيمة c_{ij} هي 1- وإذا كان $\vec{e}_j$ لا ينتمي للدائرة تكون قيمة c_{ij} هي صفر .

مثال:

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}(r,\bar{E})$ المعطى بالشكل (55)، عندئذ يكون:



الشكل (55)

إن جهة $\vec{e}_1$ مع جهة دوران عقارب الساعة وكذلك $\vec{e}_2$ أما جهة $\vec{e}_3$ فهي بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

17- مصفوفة الدوائر الأساسية في البيان الموجه

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}(r,\vec{E})$، فإن مصفوفة الدوائر الأساسية لهذا للبيان الموجه $\vec{G}(r,\vec{E})$ هي مصفوفة أسطرها تمثل الدوائر الأساسية في البيان وأعمدتها هي أضلاع البيان وتعرف عناصرها بنفس طريقة تعريف عناصر مصفوفة الدوائر للبيان الموجه ويرمز لها بـ: $c_f(\vec{G})$

18- مصفوفة القطع في البيان الموجه

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}(r,\vec{E})$ ،فإن مصفوفة القطع هي مصفوفة أسطرها مجموعات القطع وأعمدتها أضلاع البيان نرمز لها بـ k(G) ، وتعرف عناصر مصفوفة القطع كما يلي:

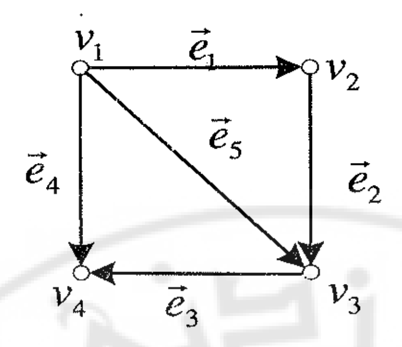
إذا كان الضلع $\vec{e}_j$ موجود في مجموعة القطع S_i وكان داخل للعقدة v_i فتكون قيمة k_{ij} هي 1، أما إذا كان الضلع $\vec{e}_j$ موجود في مجموعة القطع S_i وكان خارج من العقدة v_iفتكون قيمة k_{ij} هي 1- ، وإذا كان $\vec{e}_j$ غير موجود في مجموعة القطع فتكون قيمة k_{ij} هي صفر

19- مصفوفة مجموعات القطع الأساسية في البيان الموجه

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}(r,\vec{E})$ ، فإن مصفوفة مجموعات القطع الأساسية هي المصفوفة التي أسطرها مجموعات القطع الأساسية وأعمدتها هي أضلاع البيان نرمز لها بـ $k_f(\vec{G})$. تعرف عناصر مجموعات القطع الأساسية كما تعرف عناصر مصفوفة القطع في البيان الموجه.

مثال:

ليكن لدينا البيان الموجه المعطى بالشكل (56).



الشكل (56)

- أوجد مصفوفة التجاور.
- أوجد مصفوفة التأثير.
- أوجد مصفوفة الدوائر.
- أوجد مصفوفة الدوائر الأساسية .
- أوجد مصفوفة القطع.
- أوجد مصفوفة مجموعات القطع الأساسية.

الحل:

- أن مصفوفة التجاور .

$$\Rightarrow A(\vec{G}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- إن مصفوفة التأثير هي:

$$B(\vec{G}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 & \vec{e}_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

-إن مصفوفة الدوائر هي:

يحتوي البيان الموجه المعطى ثلاث دوائر وفق ما يلي:

$$\vec{c}_1 = <\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_5>$$

$$\vec{c}_2 = <\vec{e}_5, \vec{e}_3, \vec{e}_4>$$

$$\vec{c}_3 = <\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4>$$

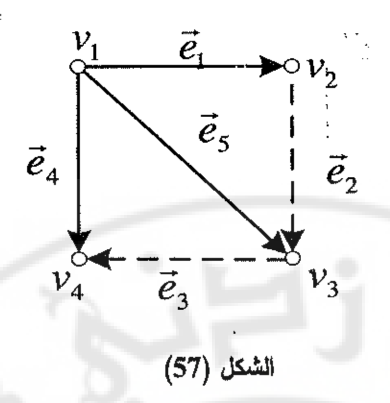
إذا فإن مصفوفة الدوائر هي:

$$C(\vec{G}) = \begin{array}{c} \\ \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vec{c}_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 & \vec{e}_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- أن مصفوفة الدوائر الأساسية هي:

نختار أي شجرة مشدودة على البيان الموجه المعطى ثم نوجد الدوائر الأساسية.

فإذا اخترنا الشجرة المشدودة التالية:



الشكل (57)

فنجد دائرتين أساسيتين هما:

$$\vec{c}_1 = < \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_5 >$$

$$\vec{c}_2 = < \vec{e}_5, \vec{e}_3, \vec{e}_4 >$$

$$\Rightarrow C_f(\vec{G}) = \begin{matrix} & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 & \vec{e}_5 \\ \vec{c}_1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \vec{c}_2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

- مصفوفة مجموعات القطع:

إن مجموعات القطع هي:

$$S_1 = < \vec{e}_1, \vec{e}_5, \vec{e}_4 >$$

$$S_2 = < \vec{e}_1, \vec{e}_2 >$$

$$S_3 = < \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5 >$$

$$S_4 = < \vec{e}_3, \vec{e}_4 >$$

$$S_5 = < \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5 >$$

$$S_6 = < \vec{e}_2, \vec{e}_5, \vec{e}_4 >$$

إذا مصفوفة مجموعات القطع هي:

$$k(\vec{G}) = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 & \vec{e}_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

إن مصفوفة مجموعات القطع الأساسية هي .

إن مجموعات القطع الأساسية هي:

$$\$_1 =< \vec{e}_1, \vec{e}_2 >$$

$$\$_2 =< \vec{e}_2, \vec{e}_5, \vec{e}_3 >$$

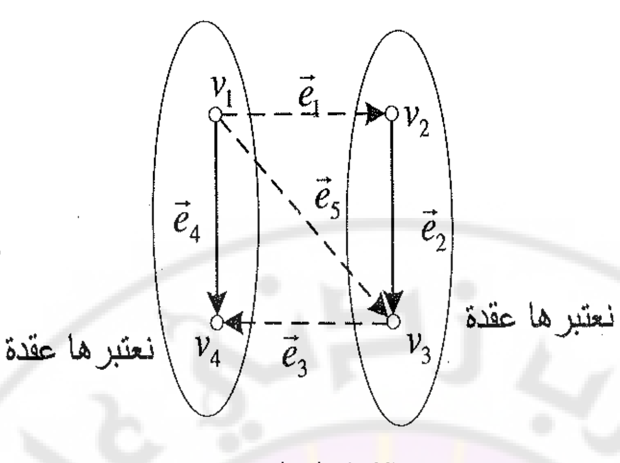
$$\$_3 =< \vec{e}_3, \vec{e}_4 >$$

إن مصفوفة مجموعات القطع هي:

$$\Rightarrow k_f(\vec{G}) = \begin{array}{c} \$_1 \\ \$_2 \\ \$_3 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

المجموعة $S_5 =< \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5 >$ بحذف هذه الأضلاع ينتج:



الشكل (58)

إن $\vec{e}_1$ خارج من العقدة التي في اليسار $\Leftarrow$ 1+

$\vec{e}_3$ داخل إلى هذه العقدة $\Leftarrow$ 1-

$\vec{e}_5$ خارج من هذه العقدة$\Leftarrow$ 1+

بقية الأضلاع: $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_4$ $\Leftarrow$ 0

ويكون السطر الخامس من المصفوفة:

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$
S_5	+1	0	-1	0	+1

ونفس الشيء بالنسبة لمصفوفة مجموعات القطع.

إذا أخذنا العكس أي:

$\vec{e}_1$ داخل إلى العقدة التي في اليمين $\Leftarrow$ -1

$\vec{e}_3$ خارج من هذه العقدة $\Leftarrow$ +1

$\vec{e}_5$ داخل إلى هذه العقدة $\Leftarrow$ -1

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$
فنجد $\Rightarrow$ S_5	-1	0	+1	0	-1

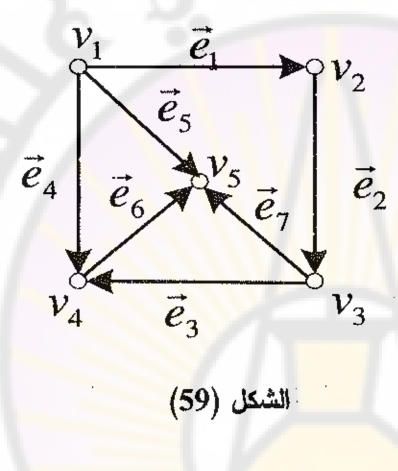
إن المصفوفة الناتجة تكون مكافئة للمصفوفة الأولى.

ملاحظة:

إن قدرة عقدة في بيان موجه تساوي إلى مجموع الأقواس الداخلة للعقدة والأقواس الخارجة من العقدة .

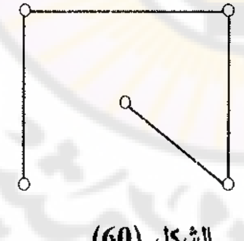
مثال:

ليكن لدينا البيان الموجه المعطى كما يلي:



الشكل (59)

لتكن الشجرة المشدودة على البيان هي:



الشكل (60)

أوجد المصفوفات التالية:

– مصفوفة التجاور – مصفوفة التأثير – مصفوفة الدوائر والدوائر الأساسية – مصفوفة القطع والقطع الأساسية .

إذا زود البيان الموجه بالأوزان التالية:

$e_5 = 1$ ، $e_6 = 3$ ، $e_7 = 2$ ، $e_1 = 4$ ، $e_2 = 3$ ، $e_3 = 2$ ، $e_4 = 5$

– أوجد مصفوفة الممثلة للبيان المعطى ؟

الحل:

– مصفوفة التجاور

$$A(\vec{G}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

– مصفوفة التأثير:

$$B(\vec{G}) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 & \vec{e}_5 & \vec{e}_6 & \vec{e}_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

– مصفوفة الدوائر:

لنوجد الدوائر في البيان الموجه:

$\vec{c}_1 = <\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4>$ ، $\vec{c}_2 = <\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_7, \vec{e}_5>$

$\vec{c}_3 = <\vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_4>$ ، $\vec{c}_4 = <\vec{e}_7, \vec{e}_3, \vec{e}_6>$

$\vec{c}_5 = <\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_7, \vec{e}_6, \vec{e}_4>$ ، $\vec{c}_6 = <\vec{e}_5, \vec{e}_7, \vec{e}_3, \vec{e}_4>$

$\vec{c}_7 = <\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_6, \vec{e}_5>$

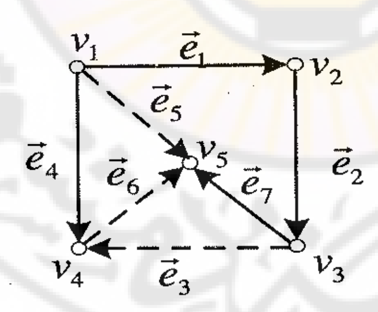
إرشاد:

القوس الداخل في الدائرة c_i والذي جهته ضمن الدائرة مع جهة عقارب الساعة يقابل عنصر في المصفوفة: 1- والقوس الداخل في الدائرة c_i والذي جهته ضمن هذه الدائرة بعكس جهة عقارب الساعة سيقابل عنصر في المصفوفة: 1+ والقوس غير الموجود في الدائرة يقابل: صفر.

$$C(\vec{G}) = \begin{array}{c} \\ \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vec{c}_3 \\ \vec{c}_4 \\ \vec{c}_5 \\ \vec{c}_6 \\ \vec{c}_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 & \vec{e}_5 & \vec{e}_6 & \vec{e}_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & -1 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & +1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- مصفوفة الدوائر الأساسية:

لنأخذ الشجرة المولدة في البيان كما يلي:



الشكل (61)

أن عدد الدوائر الأساسية في البيان يساوي عدد الأوتار في هذا البيان، إذا لدينا ثلاث دوائر أساسية.

فالدوائر الأساسية هي:

$$\vec{c}'_1 =< \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 >= \vec{e}_1$$

$$\vec{c}'_2 =< \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_7, \vec{e}_6, \vec{e}_4 >= \vec{e}_5$$

$$\vec{c}'_3 =< \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_7, \vec{e}_5 >= \vec{e}_2$$

إن مصفوفة الدوائر الأساسية هي:

$$C_f(\vec{G}) = \begin{matrix} & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 & \vec{e}_5 & \vec{e}_6 & \vec{e}_7 \\ \vec{c}'_1 & -1 & -1 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{c}'_2 & -1 & -1 & 0 & +1 & 0 & +1 & -1 \\ \vec{c}'_3 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \end{matrix}$$

-- مصفوفة القطع:

إن مجموعات القطع هي:

$\$_1 =< \vec{e}_1, \vec{e}_5, \vec{e}_4 >$ ، $\$_2 =< \vec{e}_1, \vec{e}_2 >$ ، $\$_3 =< \vec{e}_2, \vec{e}_7, \vec{e}_3 >$

$\$_4 =< \vec{e}_4, \vec{e}_6, \vec{e}_3 >$ ، $\$_5 =< \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_7 >$ ، $\$_6 =< \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_2 >$

$\$_7 =< \vec{e}_1, \vec{e}_7, \vec{e}_3 >$ ، $\$_8 =< \vec{e}_2, \vec{e}_7, \vec{e}_6, \vec{e}_4 >$ ، $\$_9 =< \vec{e}_1, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_3 >$

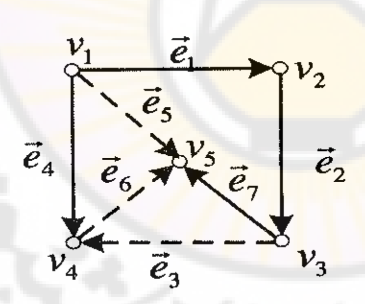
$\$_{10} =< \vec{e}_1, \vec{e}_7, \vec{e}_6, \vec{e}_4 >$ ، $\$_{11} =< \vec{e}_2, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_3 >$ ، $\$_{12} =< \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_7, \vec{e}_3 >$

إذا مصفوفة مجموعات القطع هي:

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_5$	$\vec{e}_6$	$\vec{e}_7$
$\$_1$	+1	0	0	+1	+1	0	0
$\$_2$	−1	+1	0	0	0	0	0
$\$_3$	0	−1	+1	0	0	0	+1
$\$_4$	0	0	−1	−1	0	+1	0
$\$_5$	0	0	0	0	−1	−1	−1
$\$_6$	0	+1	0	+1	+1	0	0
$\$_7$	−1	0	+1	0	0	0	+1
$\$_8$	0	−1	0	−1	0	+1	+1
$\$_9$	+1	0	−1	0	+1	+1	0
$\$_{10}$	+1	0	0	+1	0	−1	−1
$\$_{11}$	0	−1	+1	0	−1	−1	0
$\$_{12}$	0	0	−1	−1	−1	0	−1

- مصفوفة مجموعات القطع الأساسية:

إن مجموعة القطع الأساسية هي عبارة عن مجموعة قطع والتي تحوي ضلع واحد فقط من الشجرة المشدودة على البيان وباقي أضلاعها أوتار.



الشكل (62)

أي أنها أحد المجموعات السابقة والتي تحوي ضلع من الشجرة المشدودة على البيان والباقي أوتار في البيان.

وإن عدد مجموعات القطع الأساسية في بيان ما (بسيط ومترابط) يساوي عدد المناطق في البيان المرافق لهذا البيان.

إذا لدينا أربع مجموعات قطع أساسية في البيان المعطى وهي:

$$\$'_1 =< \vec{e}_4 ,\vec{e}_6 ,\vec{e}_3 >= \$_4$$

$$\$'_2 =< \vec{e}_5 ,\vec{e}_6 ,\vec{e}_7 >= \$_5$$

$$\$'_3 =< \vec{e}_1 ,\vec{e}_5 ,\vec{e}_6 ,\vec{e}_3 >= \$_9$$

$$\$'_4 =< \vec{e}_2 ,\vec{e}_5 ,\vec{e}_6 ,\vec{e}_3 >= \$_{11}$$

ومنه تكون مصفوفة القطع الأساسية هي:

$$\begin{array}{c} \\ \$'_1 \\ \$'_2 \\ \$'_3 \\ \$'_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_4 & \vec{e}_5 & \vec{e}_6 & \vec{e}_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

تمارين

1- ليكن لدينا البيان المترابط $G=(V,E)$ ، نقول أن G وحيد دوائر إذا احتوى على دائرة واحدة فقط. أثبت أن G وحيد دوائر إذا وفقط إذا كان $|E|=|V|$.

2- إذا كان البيان $G=(V,E)$ دائرة و $|V|=n$. فكم عدد الأشجار المشدودة على البيان G؟

3- أثبت العبارة التالية إذا كانت صحيحة أو خاطئة ، أعطي مثالاً مناقضاً إذا كانت خاطئة: إذا كانت الشجرتين T_1 و T_2 مشدودتين على البيان G فيجب أن يكون بينهما ضلع مشترك.

4- إذا كانت الشجرة $T=(V,E)$ بحيث $|V|=n$ فأوجد مجموع قدرات عقدها.

5- إذا كان البيان $G=(V;E)$ الشجرة أثبت أن $G=(V;E)$ بيان ثنائي التجزئة.

6- أوجد مثلاً على بيان $G=(V;E)$ بحيث يحقق: $|E|=|V|-1$ ولا يكون شجرة.

7- ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$، حيث $|V|\geq 3$. برهن أن العبارتين التاليتين متكافئتان:

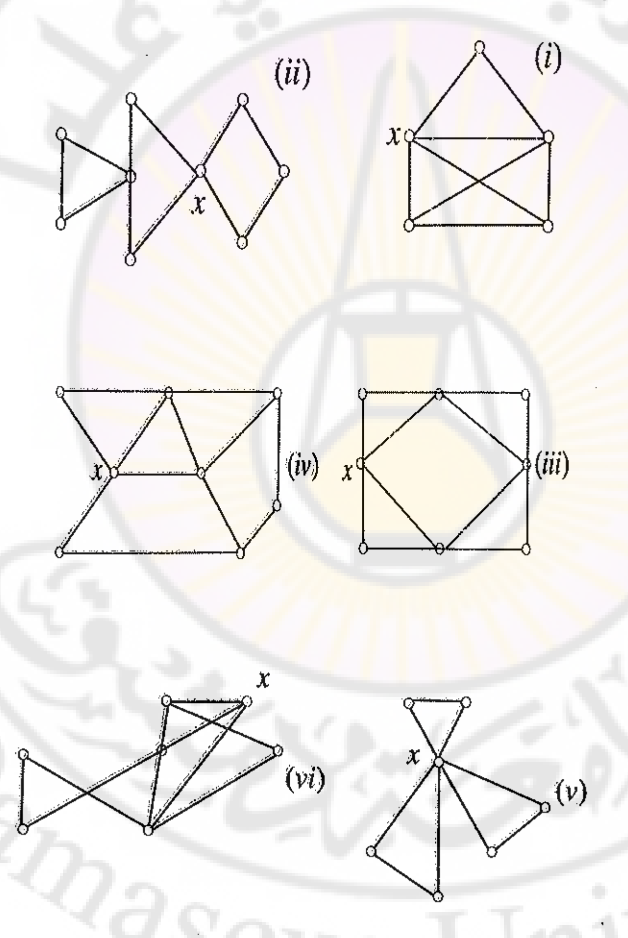
أ- البيان G مترابط ولا يحتوي على عقدة x، حيث $\{x\}$ مجموعة قطع.

ب- إذا كانت $x\neq y\neq z$ ثلاث عقد مختلفة فإنه يجب أن يوجد مسار من العقدة x إلى العقدة y لا يحتوي z.

8- لتكن لدينا الشجرتين T_1 و T_2 مشدودتين على البيان $G=(V,E)$ وليكن الضلع $e\in E$ حيث $e\in E(T_1)-E(T_2)$. أثبت أنه توجد شجرة T_3 مشدودة على البيان G تحتوي e وجميع أضلاع T_2 ماعدا ضلعاً واحداً.

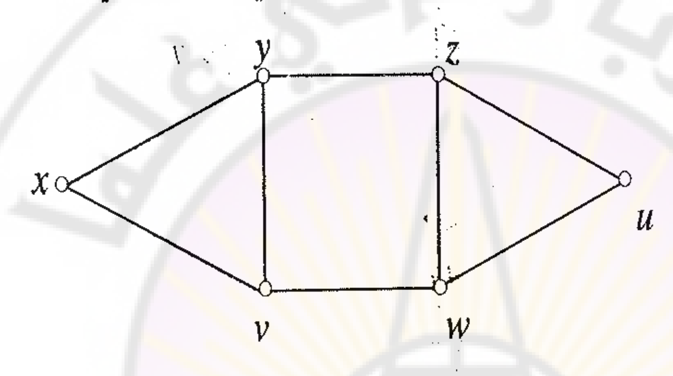
9- فيما يأتي:

أوجد الأشجار المشدودة على البيانات بحيث يكون جذرها x

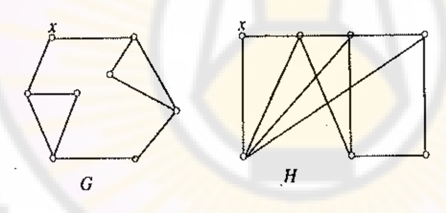


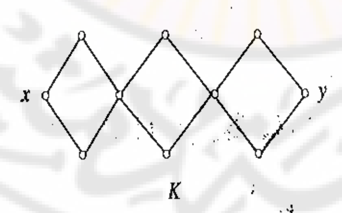
10- ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ ولتكن $S \subseteq V$. نقول أن S مجموعة قطع للبيان G إذا كان البيان الجزئي $G-\{S\}$ غير مترابط. ولا توجد مجموعة جزئية T من المجموعة S بحيث يكون البيان الجزئي $G-\{T\}$ غير مترابط.

11- أوجد مجموعتي قطع للبيان المعطى في الشكل التالي:



12- أوجد $d(x,y)$ لكل بيان من البيانات التالية:





13- أوجد قطر كل بيان من البيانات في تمرين (12).

الفصل السادس

التشفير والترميز
codes and notation

1-شيفرة هوفمان

لتكن لدينا المجموعة $\sum$ مجموعة منتهية غير خالية. نسمي $\sum$ أبجدية ونسمي كل عنصر في $\sum$ محرفاً. كل نسق منته من حروف $\sum$ يسمى كلمة. إذا كانت $\sum=\{a,t,4\}$ فإن كلاً من $a,aat,ataa4,ttt,4at4$ كلمة حروفها مأخوذة من $\sum$. نسمي الكلمة التي لا تحتوي على حروف الكلمة الخالية ونرمز لها بالرمز θ. ولتكن المجموعة $\sum^*$ مجموعة جميع الكلمات التي يمكن الحصول عليها بوساطة $\sum$. إذا كانت الكلمة $w\in\sum$ فإننا نعرف طول w على أنه عدد الحروف التي تتكون منها ونرمز لهذا الطول بالرمز $L(w)$. فمثلاً $L(\theta)=0, L(a)=1, L(aat)=3$. إذا كانت $\sum=\{0.1\}$ فإننا نسمي $\sum^*$ مجموعة الكلمات الثنائية، ومن المعروف أنّه للكلمات الثنائية أهمية قصوى حيث إن الحواسيب تخزن المعلومات والبيانات على شكل كلمات ثنائية.

إذا كانت C مجموعة منتهية من الحروف أو الرموز فإننا ننشئ تقابلا بين C ومجموعة من الكلمات الثنائية، ونسمي هذه العملية تشفيراً للمجموعة C. فمثلاً، إذا كانت $C=\{a,+,?,4\}$ وكانت M هي مجموعة الكلمات الثنائية $M=\{10,0,10,101\}$، فإن تشفير C يمكن أن يتم بواسطة التقابل $f:C\to M$ المعرف كما يلي:

$$f(4)=101\ ,\ f(?)=110\ ,\ f(+)=10\ ,\ f(a)=0$$

في معظم أنظمة التشفير المعروفة نجد أن أطوال الكلمات الثنائية المستعملة لتشفير الحروف متساوية، وفي هذه الحالة نقول إن نظام التشفير ذو طول ثابت. إن شيفرة هوفمان ليست ذات طول ثابت، وخلفية هذه الشيفرة أن تكرار الحروف

التي يراد تشفيرها يختلف من حرف إلى آخر، وبالتالي، فإنه من الأفضل تشفير الحروف التي تكرارها مرتفع نسبياً بكلمات ثنائية قصيرة. من ناحية أخرى فإن شيفرة هوفمان تحقق (خاصة الصدر) التالية: إذا كانت الكلمة الثنائية w هي شيفرة الحرف x وكانت u هي شيفرة الحرف y فإن الكلمة w ليست صدراً للكلمة (أي أن $u \neq w$ حيث w كلمة ثنائية) كما أن u ليست صدراً للكلمة w. وبسبب هذه الخاصة لا يكون هناك أي غموض أو التباس عند فك الشيفرات.

تعريف :

لتكن $C = \{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعة من الحروف ولتكن $f : C \to R$ هي دالة التكرار (أي أنه كلما كانت عدد المرات الذي يظهر فيها x_i و $f(x_i)$ فإن x_i يظهر $f(x_j)$ مرة). إذا كانت $x_i\ ,i = 1, \dots, n$ هي شيفرة x_i في نظام معين للتشفير فإننا نعرف وزن هذا النظام على أنه العدد $W = f(x_1)L(\overline{x_1}) + \cdots + f(x_n)L(\overline{x_n})$. نسمي نظام التشفير أمثلياً بالنسبة إلى مجموعة من الأنظمة إذا كان وزنه أصغر من أو يساوي وزن أي نظام من هذه الأنظمة.

قبل أن نعرض الخوارزمية المتعلقة بإيجاد شيفرات هوفمان نود أن نذكر (من دون إثبات) أن شيفرة هوفمان أمثلية بالنسبة إلى الأنظمة ذات الطول المتغير والتي تتمتع بخاصة الصدر.

2-خوارزمية شيفرة هوفمان

لتكن C مجموعة من الحروف ولتكن $f : C \to R$ هي دالة التكرار.

1- من أجل أي محرف $x \in C$ نرسم عقدة و نعلمه بالعلامة $f(x)$ حيث تكون جميع العقد على سطر واحد نسميه السطر الأساسي وبحيث تكون العلامات مرتبة تصاعدياً من اليسار إلى اليمين.

2- أبدأ من اليسار واجعل العقدة الأول تابعاً مباشراً أيسر لعقدة جديد واجعل العقدة الثاني تابعاً مباشراً أيمن لهذه العقدة الجديدة ثم نعلم العقدة الجديد بمجموع علامتي العقدتين الأولى والثانية ثم نعدل البيان بحيث تكون العقدة الجديد في السطر الأساسي.

3- عدل البيان بحيث تكون العلامات مرتبة تصاعدياً في السطر الأساسي.

4- كرر الخطوة (2) والخطوة (3) كلما أمكن ذلك. (لاحظ أن C مجموعة منتهية وبالتالي، فإن الخوارزمية تتوقف بعد عدد منته من الخطوات وذلك عندما يحتوي السطر الأساسي على عقدة واحد فقط نسميه الجذر).

5- ارسم الشجرة الثنائية التي حصلت عليها في الخطوة (4) بدون علامات ثم علم كل ضلع يربط عقدة أ بتابعه المباشر الأيسر بالعلامة 0 وعلم كل ضلع يربط عقدة أ بتابعه المباشر الأيمن بالعلامة1.

تسمى الشجرة التي نحصل عليها بوساطة الخوارزمية السابقة شجرة هوفمان. من أجل أي محرف $x \in C$ فإن العقدة الذي تمثل x تكون ورقة في هذه الشجرة، ولإيجاد شيفرة x فإننا نكتب (من اليسار إلى اليمين) علامات الأضلاع التي تقابلها إذا انطلقنا من الجذر واتبعنا الفرع الذي يربط الجذر بالورقة التي تمثل x.

مثال :

لتكن مجموعة المحارف $C = \{d, e, r, s, t\}$ ولتكن الدالة $f : C \to R$ معرفة كما يلي:

$$f(d) = 8, f(e) = 7, f(r) = 5, f(s) = 24, f(t) = 4$$

أ- أوجد شجرة هوفمان ثم أوجد شيفرة هوفمان للمجموعة C.

ب- أوجد وزن الشيفرة.

ت- شفر الرسالة الآتية: "*desert*".

ث- فك الشيفرة الآتية: 0010101000.

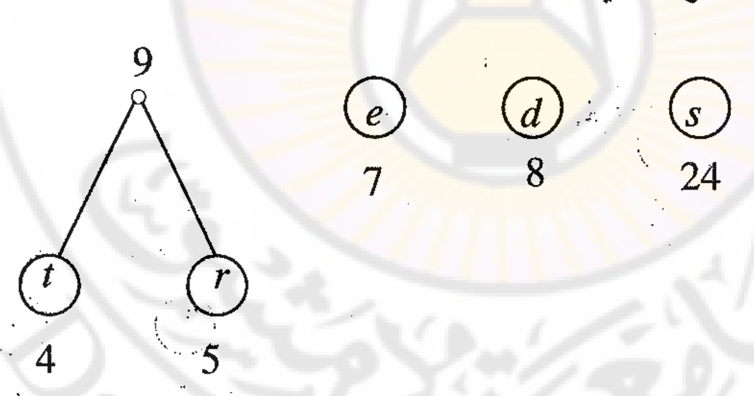
الحل:

(أ) (1) الخطوة الأولى:

t	r	e	d	s
4	5	7	8	24

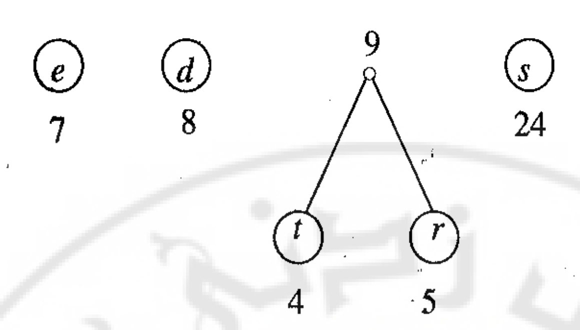
الشكل (1)

(2) الخطوة الثانية:



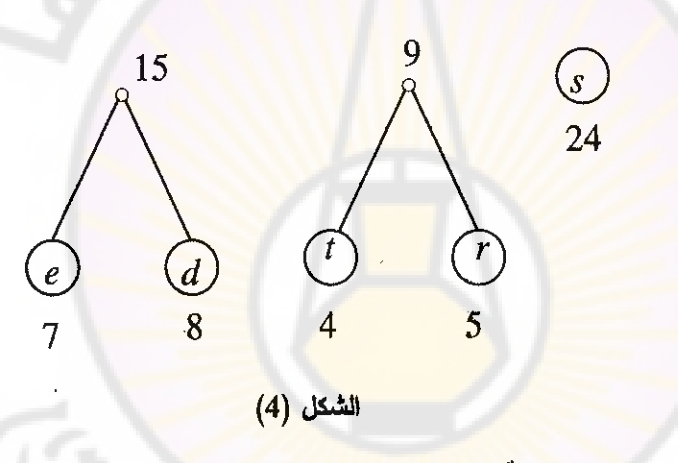
الشكل (2)

(3) الخطوة الثالثة:



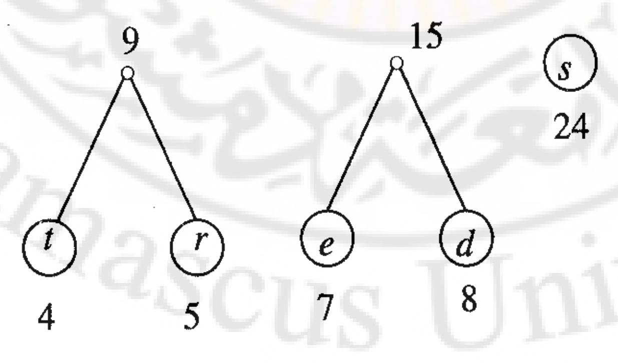
الشكل (3)

(4) الخطوة الرابعة:



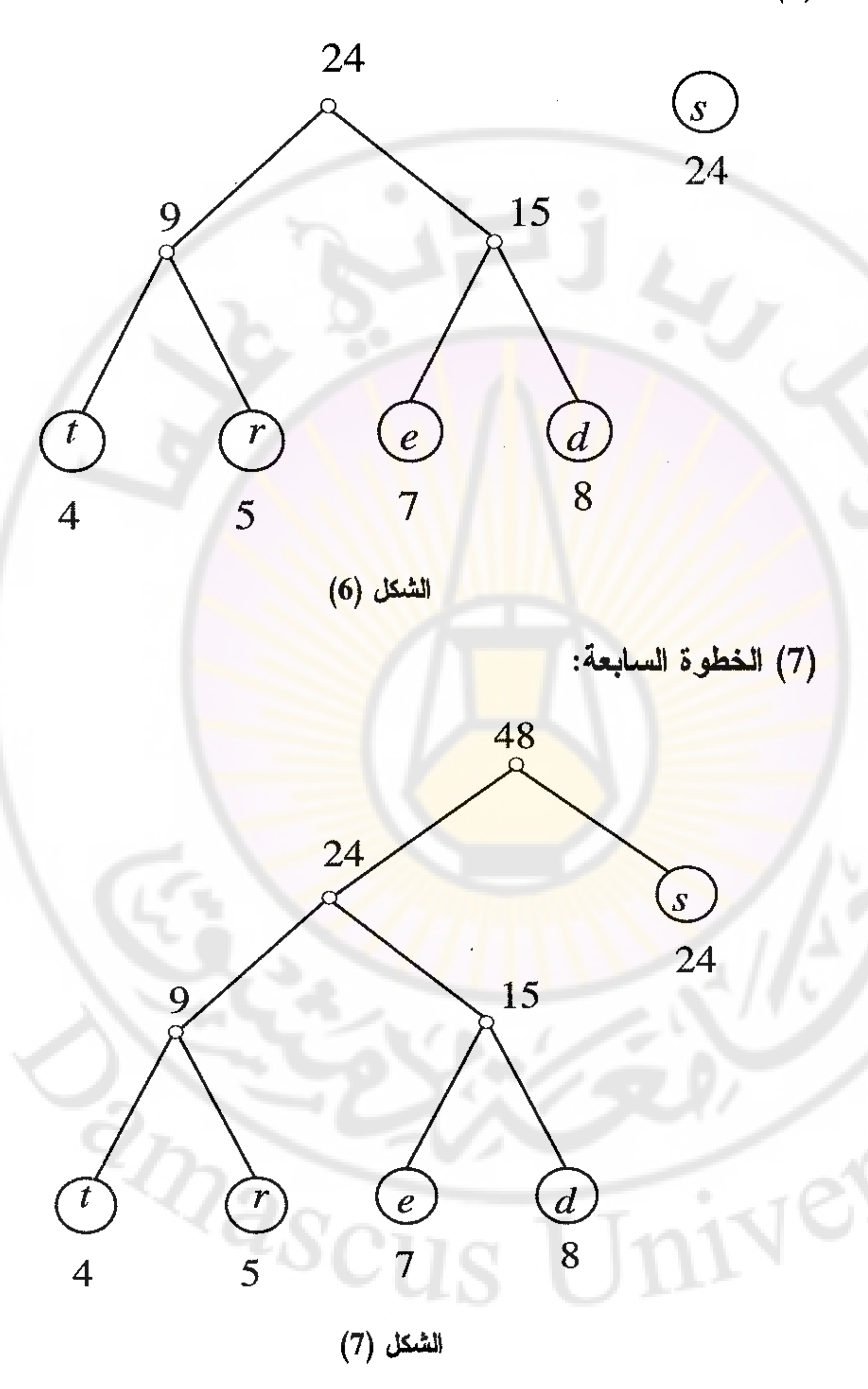
الشكل (4)

(5) الخطوة الخامسة:



الشكل (5)

(6) الخطوة السادسة:

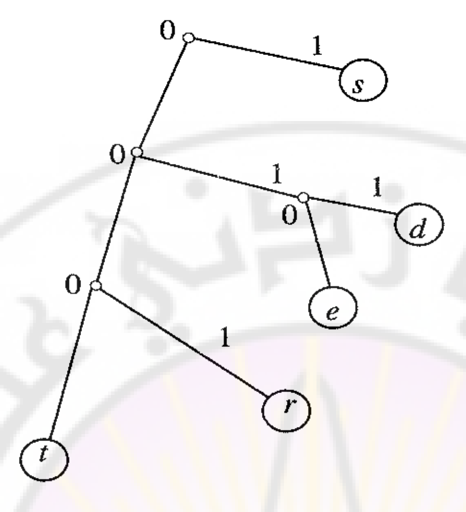


الشكل (6)

(7) الخطوة السابعة:

الشكل (7)

وبالتالي، فإن شجرة هوفمان هي:



الشكل (8)

الآن، إذا رمزنا لشيفرة الحرف x بالرمز $\bar{x}$ فإن الجدول التالي يعطينا شيفرة هوفمان.

x	t	r	e	d	s
$\bar{x}$	000	001	010	011	1

(ب) إن وزن الشيفرة هو:

$$W = (3)\ (4) + (3)\ (5) + (3)\ (7) + (3)\ (8) + (1)\ (24)$$
$$= 12 + 15 + 21 + 24 + 24 = 96$$

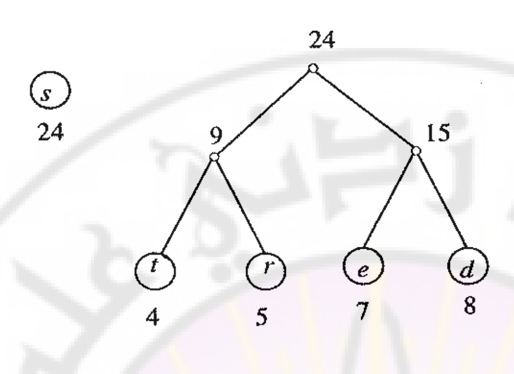
(ج) إن شيفرة "*desert*" هي 0110101010001000

(د) بفك الشيفرة المعطاة نحصل على الرسالة "*derest*".

ملاحظات

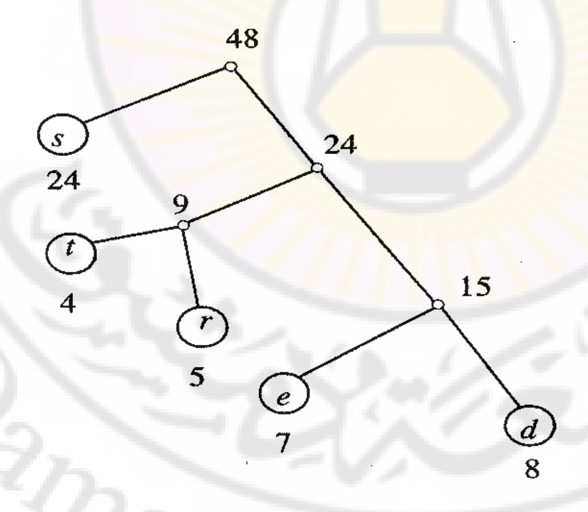
1- في المثال السابق يمكن الحصول على شيفرة أخرى وذلك بتعديل الخطوتين السادسة والسابعة كما يأتي:

الخطوة السادسة:



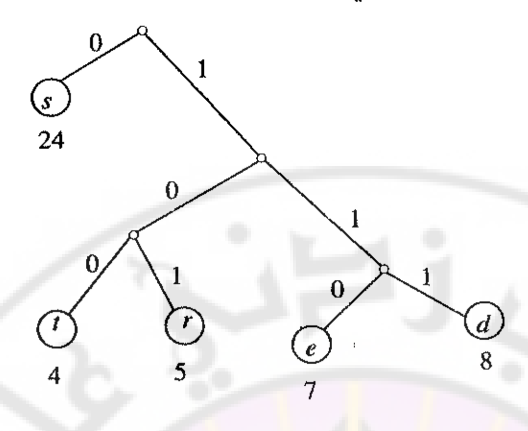
الشكل (9)

الخطوة السابعة:



الشكل (10)

وبذلك تكون شجرة هوفمان هي:



الشكل (11)

وبالتالي نحصل على الجدول الأتي:

x	s	t	r	e	d
$\bar{x}$	0	10 0	10 1	11 0	11 1

واضح أن وزن الشيفرة الجديدة يساوي وزن الشيفرة الأخرى ولكن يحدث تعديل في تشفير الرسائل وفك الشيفرات. لذلك، نتفق على ألاً نغير ترتيب العقد في السطر الأساسي إلا إذا كان ذلك ضرورياً.

2- من الملاحظة (1) نستنتج أنه يمكن أحياناً الحصول على أكثر من حل لمسألة إيجاد شيفرة هوفمان وبالتالي فإن هذه الشيفرة ليست وحيدة.

3-الترميز البولندي

POLISH NOTATION

تعريف:

لتكن لدينا الشجرة الثنائية المنتظمة المرتبة ذات الجذور $(T=(V,E),r)$. إذا كانت العقدة $x \in V$ فإننا نرمز بالرمز $T(x)$ للشجرة الجزئية ذات الجذر x، وإذا كانت العقدة a هو التابع المباشر الأيسر للعقدة x وكانت العقدة b هو

التابع المباشر الأيمن للعقدة x فإننا نسمي $xT(a)T(b)$ المرافق الصدري للعقدة x ونسمي x $T(a)\,T(b)$ المرافق العجزي للعقدة x كما نسمي $T(a)xT(b)$ المرافق الداخلي للعقدة x.

تعريف:

نقول إننا قد أجرينا تسلقاً مباشراً للشجرة T إذا قمنا بما يلي:

(1) نكتب المرافق الصدري للجذر، ليكن هذا المرافق هو $rT(a)T(b)$.

(2) من أجل كل عقدة داخلية x نكتب المرافق الصدري x مكان $T(x)$، ومن أجل أب ورقة y نكتب y مكان $T(y)$.

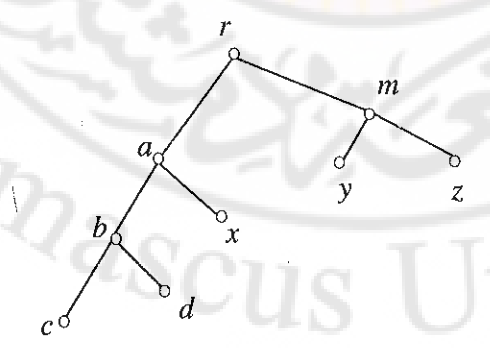
(3) نكرر الخطوة (2) كلما أمكن ذلك.

تعريف:

نقول إننا قد أجرينا تسلقاً عكسياً للشجرة T إذا استخدمنا المرافق العجزي بدلاً من المرافق الصدري في (1) و (2). كذلك نقول إننا قد أجرينا تسلقاً داخلياً للشجرة T إذا استخدمنا المرافق الداخلي بدلاً من المرافق الصدري في (1) و (2).

مثال :

لتكن (T,r) هي الشجرة في الشكل (12)



الشكل (12)

أ- أجر تسلقاً مباشراً للشجرة T.

ب- أجر تسلقاً عكسياً للشجرة T.

ت- أجر تسلقاً داخلياً للشجرة T.

الحل:

أ- الخطوات التالية تزودنا بتسلق مباشر للشجرة T.

الخطوة الأولى:

$$rT(a)\,T(m)$$

الخطوة الثانية:

$$r\,aT(b)T(x)mT(y)T(z)$$

الخطوة الثالثة:

$$r\,aT(c)T(d)x\,myz$$

الخطوة الرابعة:

$$r\,a\,b\,c\,d\;x\,m\,y\,z$$

ب- الخطوات التالية تزودنا بتسلق عكسي للشجرة T.

الخطوة الأولى:

$$T(a)\,T(m)r$$

الخطوة الثانية:

$$T(b)\,aT(x)\,r\,T(y)\,mT(z)$$

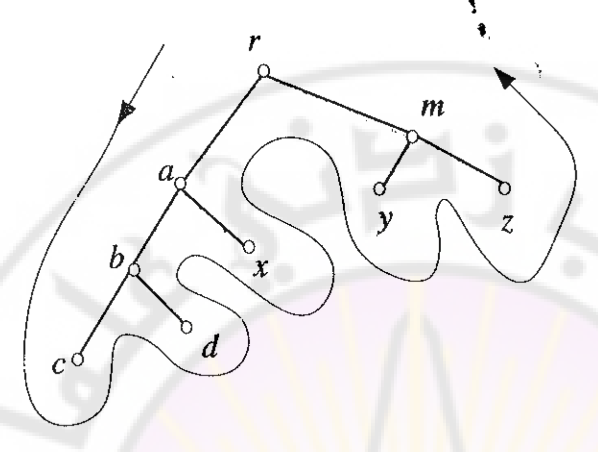
الخطوة الثالثة:

$$T(c)\,bT(d)\,a\,x\,rymz$$

الخطوة الرابعة

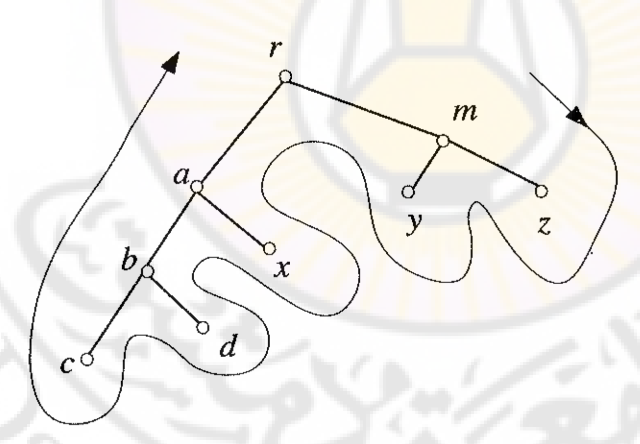
$$cbdaxrymz$$

نلاحظ أن يمكن الحصول على النتيجة الأخيرة في (أ) عن طريق متابعة السهم الموجود في الشكل (13).



الشكل (13)

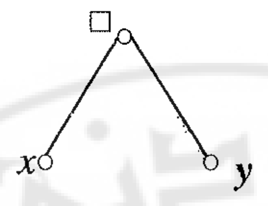
كذلك نلاحظ أنه يمكن الحصول على النتيجة الأخيرة في (ب) عن طريق متابعة السهم الموجود في الشكل (14) وكتابة العقد من اليمين إلى اليسار:



الشكل (14)

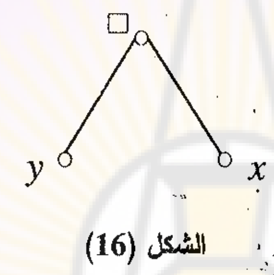
إذا كانت p عبارة حسابية فإنه يمكن تمثيل p بشجرة مرتبة حيث تمثل العمليات الثنائية بالعقد الداخلية وتمثل الثوابت والمتغيرات بالأوراق، ونسميها شجرة العبارة p. في ما يلي نستخدم / للدلالة على القسمة. كما نستخدم *

للدلالة على الضرب ونستخدم $a \uparrow b$ $(a**b)$ بدلاً من a^b. إذا كانت □ عملية ثنائية على مجموعة ما فإننا نمثل العبارة $x \square y$ بالشجرة المرتبة التالية:



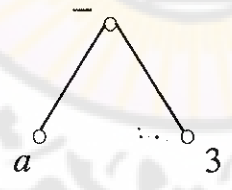
الشكل (15)

إذا كانت العملية □ تبديليه فإن $x \square y = y \square x$ وبالتالي فإنه يمكن إنشاء شجرة أخرى وهي:



الشكل (16)

أما إذا كانت العملية □ غير تبديليه فإن الشجرة المرتبة الوحيدة. إن شجرة العبارة $a-3$ هي:



الشكل (17)

مثال :

حد شجرة العبارة $(a+b)^2 + (\frac{cd-e}{4})$

الحل

الشكل (18)

تعريف:

إذا كانت T هي شجرة العبارة p فإن العبارة التي نحصل عليها عن طريق التسلق المباشر للشجرة T تسمى الترميز البولندي للعبارة p، أما العبارة التي نحصل عليها عن طريق التسلق العكسي للشجرة T فتسمى الترميز البولندي العكسي للعبارة p. كذلك، تسمى العبارة التي نحصل عليها عن طريق التسلق الداخلي للشجرة T الترميز الداخلي للعبارة p. إن الترميز الداخلي غير صالح لحساب العبارات وذلك لأن الأقواس ضرورية. أما أهمية كل من الترميز البولندي و الترميز البولندي العكسي فإنها تعود إلى أن عدم وجود الأقواس لا يؤدي إلى أي غموض في الحسابات.

مثال :

لتكن p هي العبارة المعطاة في المثال السابق

أ- أوجد الترميز البولندي للعبارة p.

ب- أوجد الترميز البولندي العكسي للعبارة p.

الحل

أ- باستخدام شجرة العبارة p الموجود في المثال السابق نجد أن:

$$p = +**+ab2/-*cde4$$

ب- باستخدام شجرة العبارة p الموجود في المثال السابق نجد أن:

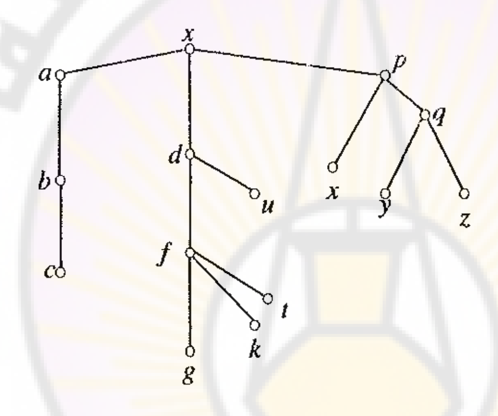
$$ab+**cd-4/+$$

تمارين

1- أعط مثالاً على شجرة ثنائية منتظمة ومثالاً على شجرة ثنائية غير منتظمة.

2- لتكن الشجرة الثنائية المنتظمة $T=(V,E)$ بحيث $|v|=n$ أثبت أنه إذا كان m هو عدد العقد الداخلية في T فإن $n=2m+1$ وأثبت أن عدد الأوراق في T يساوي $m+1$.

3- لتكن لدينا الشجرة $T=(V,E)$ المعطاة بالشكل التالي:



أ- أوجد مجموعة العقد الداخلية للشجرة T.

ب-أوجد مجموعة الأوراق في T.

ت-أعط مثالاً على فرع في T.

ث-أوجد ارتفاع T ومستوى كل من العقد x , b , t , d.

ج- أوجد الشجرة الجزئية ذات الجذر d.

ح- أوجد تابعاً مباشرا للعقدة p وأوجد تابعاً للعقدة d.

4- لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة كلياً حيث

$A=\{out ,of ,the , sea ,came ,he\}$ وبحيث أن العلاقة $\leq$ هي علاقة الترتيب المعجمي على الكلمات.

أ- أوجد شجرة البحث الثنائية $T(A)$ للمجموعة A.

ب-أضف sun ثم أضف $bright$ إلى $T(A)$.

5- حل التمرين (4) من أجل:

أ- $A=\{no, body, knows, where, the, wind, goes\}$ ثم أضف $ship$ ثم أضف sea إلى $T(A)$.

ب- $A=\{all, people, are, created, free\}$ ثم أضف $equal$ ثم أضف $omar$ إلى $T(A)$.

6- لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة كليا بحيث $A=\{-7,-3,0,5,8\}$ والعلاقة $\leq$ هي علاقة الترتيب الكلي المعرفة على الأعداد.

أ- أوجد شجرة البحث ثنائية $T(A)$ للمجموعة A.

ب-أضف 3 ثم أضف 20- إلى $T(A)$.

7- حل التمرين (6) من أجل:

أ- $A=\{-3,-1,1,2,5,6\}$ ثم أضف 11 ثم أضف 15 إلى $T(A)$.

ب- $A=\{3,5,7,9\}$ ثم أضف 5- ثم أضف 2 إلى $T(A)$.

8- لتكن $C=\{A,S,L,I,M,U\}$ ولتكن $f:C\to R$ معرفة كما يلي:

X	A	S	L	I	M	U
$f(x)$	32	7	9	25	5	4

أ- أوجد شجرة هوفمان ثم أوجد شيفرة هوفمان للمجموعة C.

ب- أوجد وزن الشيفرة ثم شفر الرسالة "SALAM".

ت-فك الشيفرة 1011110110101010011110111.

9- لتكن $C=\{A,I,M,E,T\}$ ولتكن $f:C\to R$ معرفة كما يلي:

X	A	I	M	E	T
$f(x)$	15	7	12	9	6

أ- أوجد شجرة هوفمان ثم أوجد شيفرة هوفمان للمجموعة C.

ب-أوجد وزن الشيفرة ثم شفر الرسالة "AIM".

ت-فك الشيفرة 1001010100.

10- لتكن $C=\{T,S,M,H,A\}$ ولتكن $f:C\to R$ معرفة كما يلي:

X	T	S	M	H	A
$f(x)$	4	8	2	5	1

أ- أوجد شجرة هوفمان ثم أوجد شيفرة هوفمان للمجموعة C.

ب-أوجد وزن الشيفرة ثم شفر الرسالة "MATH".

ت-فك الشيفرة 110111000111.

11-أوجد شجرة هوفمان ثم أوجد شيفرة هوفمان من أجل

أ- :

X	M	O	N	S	U	V
$f(x)$	25	7	9	5	4	32

ب-:

X	a	n	c	d	e	p
$f(x)$	30	6	7	23	3	2

ت-:

X	u	t	s	y	d
$f(x)$	11	10	4	30	5

12- لكل عبارة من العبارات التالية، أوجد شجرة العبارة، الترميز البولندي، والترميز البولندي العكسي:

أ- $p = (x^2 - 4y + 5z)\left[\dfrac{2x}{(z-x)^3} + \dfrac{3y}{(z+x)^3}\right]$

ب- $p = (x^3 - y)\left[xy + \dfrac{2+y^3}{(x+y^5)}\right]$

ت- $p = (x^3 - y + z)\left[\dfrac{x}{z-x} + \dfrac{y}{z^2 - y}\right]$

ث- $p = (x+y^3)\left[\dfrac{3x}{y} + \dfrac{y}{(x-y)^2}\right]$

ج- $p = (x+1)(x^2+1)(x^3+x^2+1)$

ح- $p = (x+1)(x-1) - x^3 - x^4 + 5$

13- (أ) لتكن T شجرة ثنائية ذات ارتفاع h وعدد عقدها ذات القدرة 1 هو k. أثبت أن $k \le 2^h$. [استخدم الاستقراء الرياضي على h].

(ب) أعط مثالاً على شجرة ثنائية بحيث تصبح المتباينة في (أ) مساواة.

14- هل توجد شجرة ذات جذر تحتوي على أربعة عقد داخلية وستة عقد ذات قدرة 1؟

15- هل توجد شجرة منتظمة ذات عمق 3 وتحتوي على 9 من العقد ذات قدرة 1؟

الفصل السابع

البيانات المتشاكلة
isomorphic graphs

1-مقدمة

ليكن لدينا البيان G،هناك تمثيلات متعددة للبيان G، ولكن هذه التمثيلات لا تختلف في شيء جوهري حيث إنها تتمتع بالخواص الموجودة في G. إذا كـان البيانين H,G لهما الخواص نفسها بالرغم من اختلافهمـا فـي أسـماء العقـد والأضلاع.

2-تعاريف

تعريف:

ليكن لدينا البيانين البسيطين $G=(V(G),E(G))$ و $H=(V(H),E(H))$ ، ولتكن الدالة $f:V(G)\rightarrow V(H)$ نقول أن f تشاكل من البيان G إلى البيـان H إذا تحقق التالي:

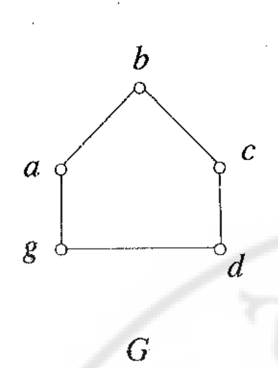
أ- الدالة f متباينة وغامرة.

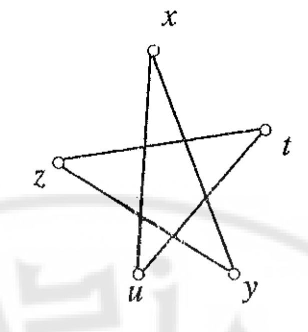
ب-من أجل أي $\forall x,y\in V(G)$ فإن $(x,y)\in E(G)$ إذا وفقط إذا كان $(f(x),f(y))\in E(H)$

في هذه الحالة نقول إن البيانين G و H متشاكلان ونكتب $G\cong H$.

مثال :

بين فيما إذا كان البيانان متشاكلين أو لا وعلل إجابتك:





الشكل (1)

الحل

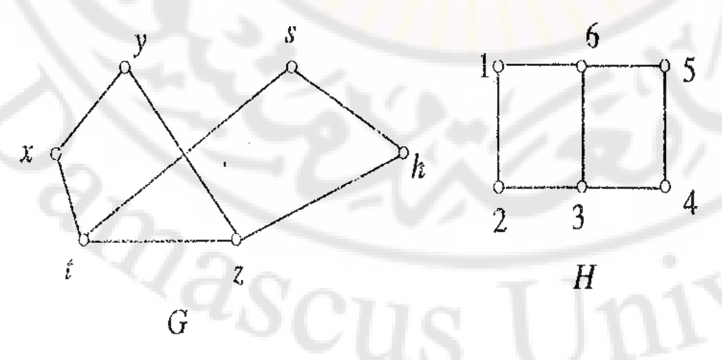
نعرف الدالة $f:V(G)\to V(H)$ كما يأتي:

X	a	b	c	d	d
$f(x)$	x	y	z	t	u

أن الدالة f تشاكل من البيان G إلى البيان H وبالتالي، فإن $G\cong H$.

مثال :

بين فيما إذا كان البيانان التاليان متشاكلين أو لا وعلل أجابتك



الشكل (2)

v	x	y	z	t	s	h
$f(v)$	2	1	6	3	4	5

واضح أن الدالة f تشاكل من البيان G إلى البيـان H وبالتـالي فـإن $G \cong H$.

تعريف :

لتكن p خاصة متعلقة بالبيانات. نقول إن p لا متغير تشاكلي إذا تحقق ما يأتي:

لكل بيانين بسيطين G و H فإنه إذا كـان $G \cong H$ وكـان G يحقـق الخاصة p فإن H يحقق الخاصة p.

بالاستناد إلى المبرهنة التالية نستطيع الحصول على بعض الـلا متغيـرات التشاكلية، كما يمكن استخدام هذه المبرهنة لاكتشاف عدم التشاكل بين البيانات.

مبرهنة (1)

لتكن الدالة $f:V(G) \to V(H)$ تشاكلاً من البيان البسيط G إلـى البيـان البسيط H عندئذ:

أ- $|V(G)| = |V(H)|$ و $|E(G)| = |E(H)|$.

ب- $\deg(f(x)) = \deg(x)$ لكل $x \in V(G)$.

ت- عدد العقد التي قدرة كل منها m في البيان G يساوي عدد العقد التي قدرة كل منها m في البيان H.

ث- عدد دوائر التي طول كل من r في البيان G يساوي عدد دوائر التي طول كل منها r في البيان H.

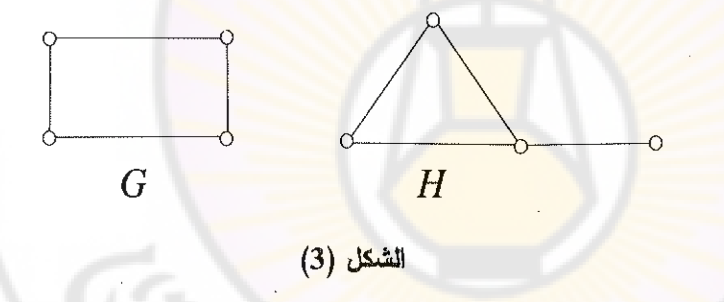
ج- G بيان مترابط إذا وفقط إذا كان H بياناً مترابطاً.

البرهان:

سنثبت (ب) ونقبل الخواص الأخرى. ليكن $x \in V(G)$ و $\deg(x) = m$ بما أن $\deg(x) = m$ فإنه توجد العقد $x_1,\ldots,x_m \in V(G)$ بحيث $x_i \neq x_j$ حيث $i \neq j$ والعقدة x_i تجاور العقدة x من أجل أي i. بما أن الدالة f متباينة وتحافظ على التجاور فإن العقد $f(x_1),\ldots,f(x_m) \in V(H)$ مختلفة وكل منها تجاور $f(x)$. إذاً $\deg(f(x)) \geq m$ وبما أن الدالة f غامرة ويحفظ عدم التجاور فإن العقد المجاورة للعقدة $f(x)$ في البيان H هي $f(x_1),\ldots,f(x_m)$ فقط إذاً $\deg(f(x)) = m$. وهو المطلوب

مثال:

بين فيما إذا كان البيانان التاليان متشاكلين أو لا وعلل إجابتك:



الشكل (3)

الحل:

G لا يشاكل H، أي $G \not\cong H$ وذلك لأن البيان H يحتوي على دائرة طولها 3 بينما البيان G لا يحتوي على دائرة طولها 3.

ملاحظات:

1- لتكن A هي مجموعة البيانات البسيطة. لتكن R هي العلاقة المعرفة على A كما يأتي: لكل $H \in A$ فإن GRH إذا وفقط إذا كان $G \cong H$. أن العلاقة R هي علاقة تكافؤ على A.

إن المتغيرات التشاكلية كثيرة، وإن إيجاد خواص مشتركة بين بيانين بسيطين G و H لا يكفي لإثبات أنهما متشاكلان، ولذلك فإن مسألة التشاكل هي من المسائل الصعبة في نظرية البيان.

3-الأيزومورفيزم في البيانات

- الايزومورفيزم البياني $f:G\to H$ هو زوج من التقابلات.

$$f_V:V_G\to V_H \qquad ,f_E:E_G\to E_H$$

بحيث لو أخذنا أي ضلع $e\in E_G$ فإن التقابل f_v يقابل أطراف e إلى أطراف $f_G(e)$.

- نقول عن البيانين G,H إنهما ايزومورفيان إذا وجد ايزمورفيزم $f:G\to H$ ونرمز لذلك بالرمز $G\cong H$.

- التقابل العقدي $f:V_G\to V_H$ يحافظ على التجاور إذا تحقق ما يلي :

$f(x)$ مجاورة لـــ $f(y)$ إذا وفقط إذا كانت x مجاورة لـــ y من أجـــل $\forall x,y\in V_G$.

قضية :

يكون البيانان البسيطان G,H ايزومورفيزم إذا وفقط إذا كانت الدالة التقابلية العددي $f:V_G\to V_H$ تحافظ على التجاور.

- نسمي الايزومورفيزم الذي يقبل بياناً G مع نفسه بـــ اوتومورفيزم.

اختبارات الايزمورفي بين البيانات :

- التغير العددي في البيان هو خاصة عددية في البيانات بحيث تتماثل هذه المتغيرات في البيانات الايزومورفية.

مبرهنة (2)

إذا كان G,H ايزومورفيان فإن $|E_G|=|E_H|$, $|V_G|=|V_H|$

نتيجة :

إن قياس مجموعة العقد ومجموعة الأضلاع هي متغير عددي بياني.

مبرهنة (3)

ليكن $f:G\to H$ ايزومورفيزم بياني ولتكن $v\in V_G$ عندها العقدتين $f(v),v$ لهما نفس القدرة.

نتيجة :

قدرة العقدة متغيرات بيانية.

تعريف :

ليكن $w=<v_0,e_1,\ldots,e_n,v_n>$ مساراً في G ولدينا الايزومورفيزم البياني $f:G\to H$ عندها صورة هذا المسار هو المسار:

$$f(w)=<f(v_0),f(e_1),\ldots,f(e_n),f(v_n)>$$

في البيان H

مبرهنة (3)

الصورة لمسار w في بيان G وفق ايزمورفيزم هو مسار له نفس الطول.

نتيجة :

الصورة وفق ايزومورفيزم لممر أو طريق أو دائرة هو ممر أو طريق أو دائرة على الترتيب ومن نفس الطول.

نتيجة :

من أجل أي عدد صحيح l ، يجب أن يكون للبيانين الايزومورفيين نفس العدد من الممرات (الطرق ، الدائرات) ذات الطول l.

مبرهنة (4)

ليكن G,H بيانان بسيطان عندها يكون f,g ايزومورفيين إذا وفقط إذا كان مكملاهما بالنسبة للأضلاع ايزوموفيان.

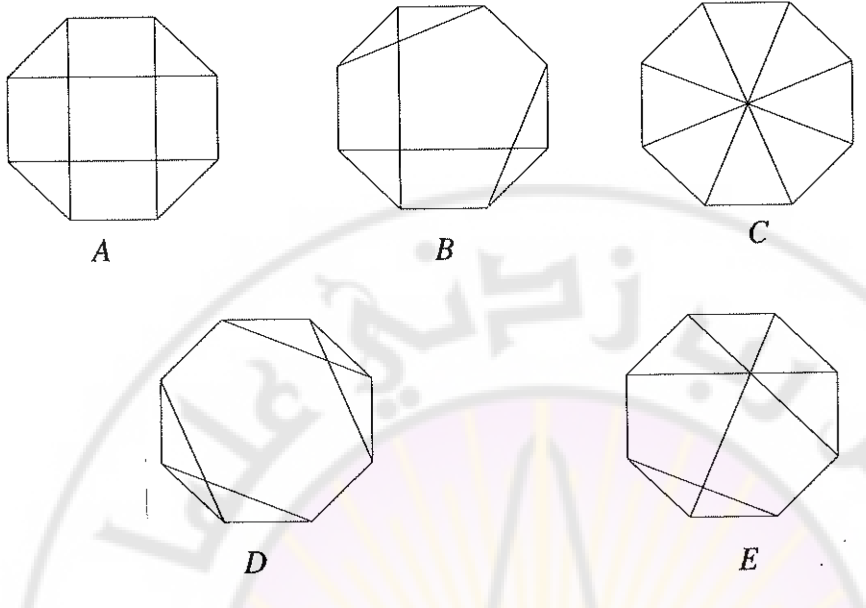
بعض المتغيرات البيانية :

1. عدد العقد.
2. عدد الأضلاع.
3. متتالية القدرات للعقد.
4. من أي بيان جزئي ممكن ، عدد النسخ المختلفة.
5. من أجل بيان بسيط ، المتمم بالنسبة للأضلاع.

أمثلة عن كيفية الاستفادة ما سبق في تحديد عدم الايزومورفية بين البيانات.

مثال:

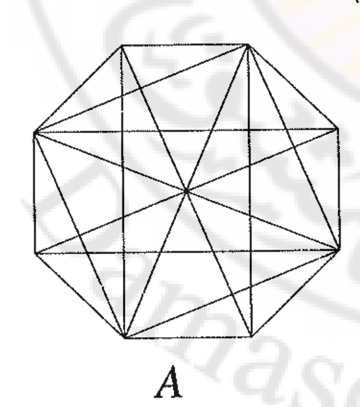
البيانات المنتظمة -3 في الشكل التالي ليست ايزومورفية مع أن لها نفس متتالية القدرات. وذلك لأنه ليس لها نفس العدد من البيانات الجزئية ذات النمط K_3 حيث A,C ليس لهما بيان جزئي K_3 و B له بيان جزئي K_3. D له أربع و E له واحد.(اعتماد على المتغير الرابع)

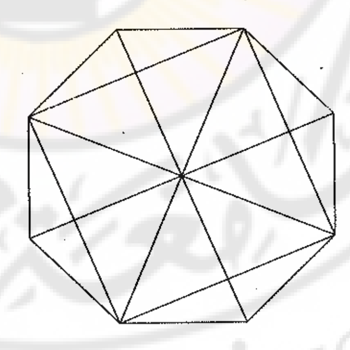


الشكل (4)

مثال:

البيانان التاليان بسيطان والمتمم للبيان A يتألف من 4 دائرات منفصلة بينما متمم البيان B يتألف من 8 دائرات وبما أن المتممين ليسا ايزومورفين فكذلك البيانات الأصل (بالاستفادة من المتغير الخاص)

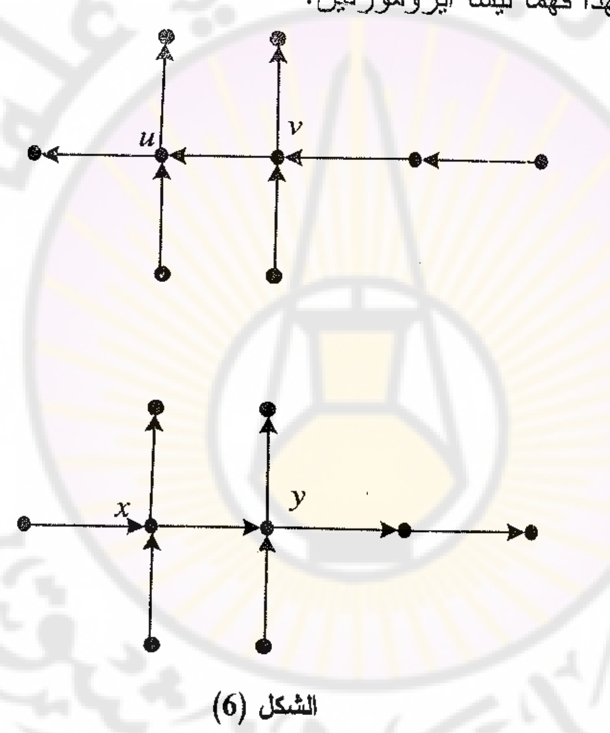




الشكل (5)

مثال:

في الشكل التالي بالرغم من أن البيانين لهما نفس متتاليات قدرات الدخول والخروج لكنهما ليسا ايزومورفين وللتأكد من ذلك نلاحظ أولاً أن العقد u,v,x,y هي الوحيدة لها قدرات الدخول 2 وبما أن قدرة الدخول متغير ايزومورفي إذاً u,v يجب أن يتم مقابلاتها بـ y,x لكن الطريق الموجه من الطول 3 الذي ينتهي في u يجب أن يقابل طريقاً موجهاً من الطول 3 ينتهي في y وبما أنه لا يوجد طريقاً كهذا فهما ليسا ايزومورفين.



الشكل (6)

تمارين

1- ليكن G_1 و G_2 بيانين بسيطين أثبت أن: $G_1 \cong G_2$ إذا وفقط إذا كان $G_1^c \cong G_2^c$.

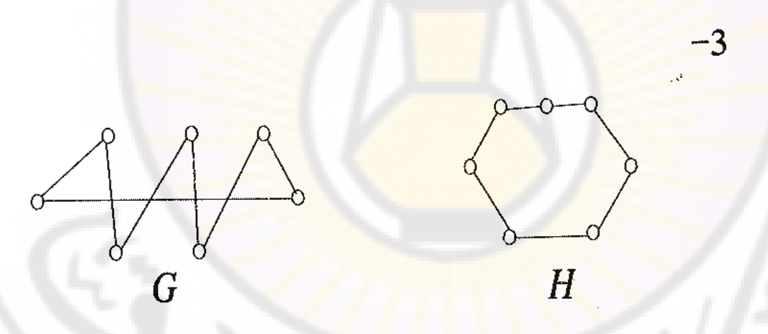
2- نقول عن البيان G أنه بسيط إنه متمم لنفسه إذا كان $G \cong G^c$.

أ- أعط مثالاً على بيان بسيط بحيث يكون عدد عقده 4 ومتمماً لنفسه.

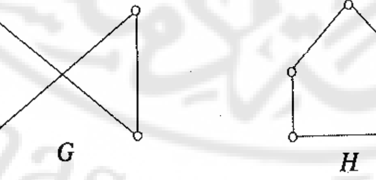
ب-أثبت إذا كان $G(V,E)$ بياناً بسيطاً متمماً لنفسه فإنه يوجد عدد صحيح k حيث $|V| = 4k$ أو $|V| = 4k+1$.

في التمارين من 3 إلى 12 بين فيما إذا كان البيانان المعطيان متشاكلين أم لا.

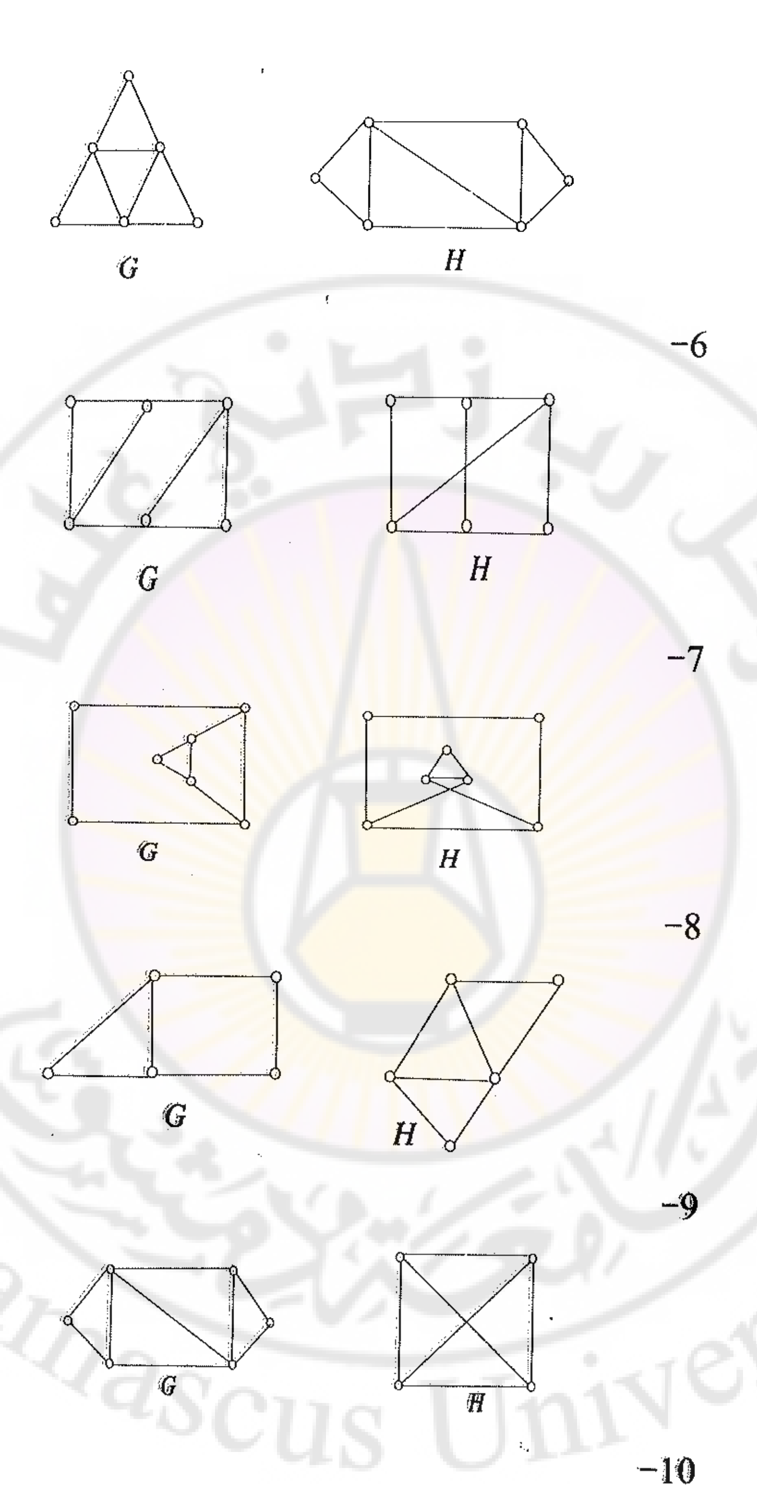
3-

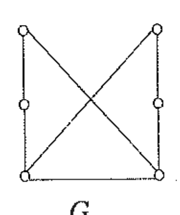


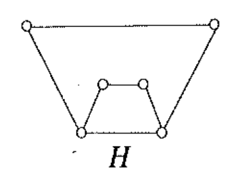
4-



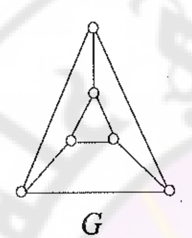
5-

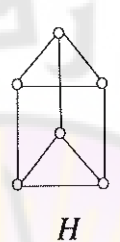

G
H
−6
G
H
−7
G
H
−8
G
H
−9
G
H
−10



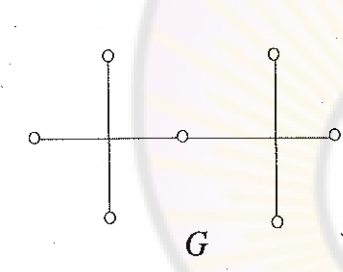


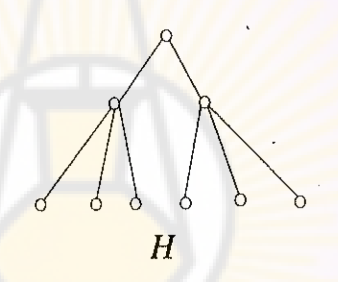
-11





-12



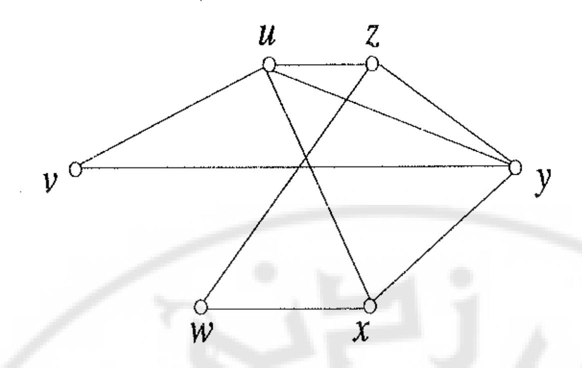


13- أوجد جميع البيانات ثنائية التجزئة غير المتشاكلة وعدد عقدها 5.

14- أوجد جميع الأشجار غير المتشاكلة وعدد عقدها 5.

15- أوجد جميع الأشجار غير المتشاكلة وعدد عقدها 6.

16- أوجد جميع الأشجار غير المتشاكلة المولدة للبيان المعطى بالشكل الأتي.



17- لتكن A هي مجموعة البيانات البسيطة. لتكن T هي العلاقة المعرفة على A كما يلي: GTH إذا وفقط إذا كان $G \cong H$ لكل $G,H \in A$ أثبت أن T علاقة تكافؤ على A وأوجد صفوف التكافؤ.

18- أوجد جميع البيانات البسيطة غير المتشاكلة التي عدد عقدها 3.

19- أوجد جميع البيانات البسيطة غير المتشاكلة التي عدد عقدها 4.

20-



الفصل الثامن

البيانات المستوية
planar graphs

1- مقدمة

لقد مثلنا البيانات تمثيلات المختلفة دون أن نلاحظ أي فارق، وحصلنا على المعلومات التي تهمنا بوساطة استخدام أي تمثيل للبيان. ولكن هناك حالات تظهر فيها فوارق مهمة التمثيلات. فمثلاً، إذا كان البيان المدروس نموذجاً رياضياً لدارة كهربائية إذ إن الأضلاع تمثل الأسلاك والعقد تمثل نقاط الاتصال لهذه الأسلاك، فإننا نحاول الحصول على تمثيل للبيان بحيث لا تتقاطع الأضلاع إلا عند نقاط الاتصال. إن هذا ممكن دائماً في الفضاء ولكنه غير ممكن في المستوى إلا إذا تحققت شروط معينة.

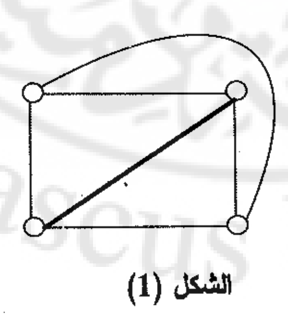
2- تعاريف ومبرهنات

تعريف:

ليكن G بياناً. نقول إن البيان G بيان مستو إذا وجد تمثيل للبيان G في المستوى بحيث لا تتقاطع الأضلاع.

مثال:

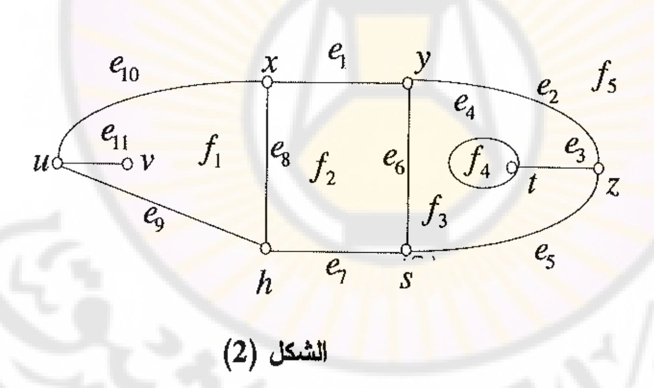
إن K_4 بيان مستو لأن التمثيل في الشكل (1) هو تمثيل مستو له:



الشكل (1)

ليكن لدينا في المستوى خط مضلع مغلق بسيط لا يتقاطع مع نفسه، فإن هذا الخط المغلق يقسم المستوى إلى منطقتين إحداهما تتكون من النقاط التي تقع داخل الخط المضلع المغلق، وهي منطقة ، والأخرى تتكون من النقاط التي تقع خارج الخط المضلع المغلق وهي منطقة غير محدودة. إن أي نقطتين في المنطقة الداخلية يمكن أن نصل بينهما بخط لا يقطع الخط المغلق. كذلك، فإن المنطقة الخارجية تحقق هذه الخاصة. أما إذا أردنا أن نصل نقطة في إحدى المنطقتين مع نقطة في المنطقة الأخرى بوساطة خط فإن هذا الخط لا بد أن يقطع الخط المغلق. وبالتالي، فإن الخط المغلق هو حدود للمنطقتين. في الحقيقة، إن الحديث عن الخطوط المغلقة والمناطق هو موضوع مبرهنة جوردان (C.JORDAN) الخاصة بالمنحنيات.

لنفرض أن G بيان مترابط مستو معطى بالشكل (2).



الشكل (2)

واضح أن البيان G يقسم المستوى إلى مناطق منفصلة. جميع هذه المناطق محدودة إلا المنطقة f_5 فهي غير محدودة. حدود المنطقة f_2 هي الدائرة: $xe_1\, ye_6\, se_7\, he_8 x$ بينما حدود المنطقة f_1 هي المسار المغلق: $ue_{10}\, xe_8\, he_9\, ue_{11}\, ve_{11} u$. كذلك، إن حدود المنطقة f_4 هو الدائرة: $te_4\, t$.

بينما حدود المنطقة f_3 هي المسار المغلق: $y e_2 z e_3 t e_4 t e_3 z e_5 s e_6 y$. إن الضلع يحدد منطقتين إذا كان محتوى في دائرة وأنه يحد منطقة واحدة إذا كان غير محتوى في دائرة أي جسر في البيان.

نسمي المنطقة وجهاً ونرمز لها بالرمز f، وإذا كان البيان G بياناً مترابطاً مستوياً وكان الضلع e جسراً في البيان G عندئذ فإن عدد وجوه البيان $G-\{e\}$ يساوي عدد وجوه البيان G، بينما إذا كان الضلع e ليس جسراً في G فإن عدد وجوه البيان $G-\{e\}$ أقل بواحد عن عدد وجوه البيان G سوف نستخدم الرموز n و m و f للدلالة على عدد العقد و عدد الأضلاع وعدد الوجوه في البيان G على الترتيب.

مبرهنة (1) (صيغة أويلر).

إذا كان G بياناً مترابطاً مستوياً فإن $n-m+f=2$.

البرهان:

نستخدم الاستقراء الرياضي على عدد وجوه r. ليكن البيان G بياناً مترابطاً مستوياً حيث $r=1$. عندئذ، إن حذف أي ضلع من البيان G لا يقلل عدد الوجوه وبالتالي فإن كل ضلع في البيان G جسر في البيان G. إذاً، G لا يحتوي على دوائر وبالتالي فإن G شجرة. بالاستناد إلى المبرهنة (2) في الفصل الخامس، نجد أن $m=n-1$ وبالتالي فإن:

$$n-m+f=n-n+1+1=2$$

لنفرض أن المطلوب صحيح من أجل أي بيان مترابط مستو عدد وجوهه k حيث $k\geq 1$ عدد صحيح و ليكن البيان G بياناً مترابطاً مستوياً عدد وجوهه $k+1$. بما أن $f\geq 2$ فإن G يحتوي على دائرة. ليكن e هو أحد أضلاع هذه الدائرة. عندئذ، إن البيان $G'=G-\{e\}=(V',E')$ بيان مترابط مستو عدد وجوهه k و $|V'|=n, |E'|=|E|-1)$. بالاستناد إلى فرض الاستقراء نجد أن:

$$n-(m-1)+f=2$$

ولكن:

$$|V|=|V'|$$

و: $m=|E'|+1$

و: $f(G)=f(G-e)+1$

إذاً:

$$n-m+f=|V'|-|E'|-1+f(G-e)+1=2$$

و هو المطلوب.

ملاحظة:

تتعلق صيغة أويلر بالبيانات المستوية المترابطة، وإذا كان G بياناً مستوياً عدد مركباته k عندئذ تكون صيغة أويلر كما يلي:

$$n-m+f=k+1$$

مبرهنة (2)

ليكن لدينا البيان البسيط المترابط المستوي G بحيث $n\geq 3$ فإن:

$$m\leq 3*n-6$$

البرهان

بما أن البيان G مترابط و $n\geq 3$ فإن $m\geq 2$. إذا كان $m=2$ فإن $2<3*(3)-6=3$ وبالتالي، فإن العلاقة محققة. لنفرض أن $m\geq 3$

ليكن ($A=\{x,y\}: y$ ضلع يحد x وجه و y)، و بما أن كل ضلع يحد وجهين على الأكثر فإن $|A|\le 2*m$. وبما أن كل وجـــه يحـــده ثلاثـــة أضلاع على الأقل فإن $|A|\ge 3*f$.

إذاً:

$$3*f\le 2*m$$

باستخدام صيغة أويلر نجد أن:

$$n-m+f=2$$

إذاً:

$$3*[2-n+m]=3*f\le 2*m$$

وبالتالي، فإن:

$$m\le 3*n-6$$

نتيجة:

K_5 بيان غير مستو.

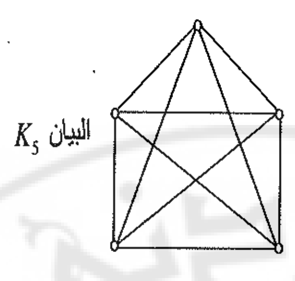
البرهان

نفرض أن k_5 بيان مستو. نعلم أن $n=5$ و $m=10$ بما أن k_5 بســيط ومترابط ومستو، وبالاستناد إلى المبرهنة (2) نجد أن $10\le 3*(5)-6=9$ وهذا تناقض.

مثال:

أثبت أن K_5 لا يمكن رسمه على سطح كرة أو في مستوي دون أن تتقاطع أضلاعه

الحل:



الشكل (3)

إن هذا البيان منتظم كون قدرة كل عقدة مساوية لباقي قدرات العقد.

لنفرض جدلا" أنه يمكن رسم هذا البيان في مستوي أو على سطح كرة دون أن تتقاطع أضلاعه.

وبالتالي فهو يحقق قانون أولر: $n-l+f=2$

وفي K_5: $n=5, l=10$ و f لا نعلمها

وبما أن البيان يحقق قانون أولر، نستطيع حساب عدد الوجوه f :

$$5-10+f=2 \Rightarrow f=7$$

وكونه قابل للرسم في مستوي أو على سطح كرة دون أن تتقاطع أضلاعه (حسب الفرض الجدلي)

فهو يحقق القانون : $f*l'=2l$

سنختار الوجه المزخرف في الرسم

البيان K_5

الشكل (4)

$\Leftarrow$ $\quad l' = 3$ (هذا الوجه يحوي ثلاث أضلاع)

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} f * l' = 7*3 = 21 \\ 2*l = 2*10 = 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 21 \neq 20$$

إذا فإن الفرض الجدلي خاطئ ولا يمكن رسم هذا البيان في مستوي أو على سطح كرة دون أن تتقاطع أضلاعه.وهو المطلوب.

مبرهنة (3)

ليكن لدينا البيان البسيط المترابط $G = (V;E)$ بحيث أن $n \geq 3$ ولا يحتوي على مثلثات فإن:

$$m \leq 2*n-4$$

البرهان

بما أن البيان G مترابط $n \geq 3$ فإن $m \geq 2$. إذا كان $m = 2$ فإن $2 = 4 - (3)*2 \leq 2$ وبالتالي فإن العبارة محققة. لنفرض أن $m \geq 3$. إذا كان البيان G شجرة فإن العلاقة محققة وليكن:

$(A = \{x,F\} : F$ وجه و x ضلع يحد $F)$،

وبما أن كل ضلع يحد وجهين على الأكثر فإن $|A| \leq 2*m$، وبما أن البيان G لا يحتوي مثلثات فإن كل وجه يحده أربعة أضلاع على الأقل و من ثم فإن $|A| \geq 4*f$.

إذاً: $4*f \le 2*m$

ولكن باستخدام صيغة أويلر لدينا $f \le 2-n+m$

إذاً، $4*[2-n+|E(G)|] \le 2*m$

وبالتالي، فإن:

$$m \le 2*n-4$$

نتيجة:

$K_{3,3}$ غير مستو.

البرهان

نفرض أن $K_{3,3}$ بيان مستو، نعلم أن $n=6$ و $m=9$، وبما أن $K_{3,3}$ بيان بسيط مترابط ولا يحتوي على مثلثات فإننا نجد أن باستخدام المبرهنة (3)، أن

$9 \le 2*(6)-4=8$

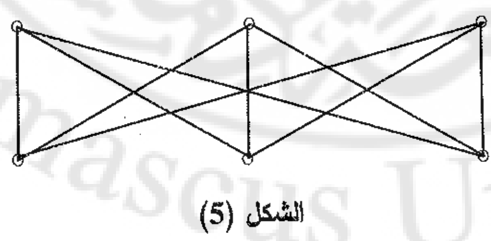
وهذا مستحيل. إذاً $K_{3,3}$ غير مستو. وهو المطلوب

مثال:

برهن أن البيان $K_{3,3}$ لا يمكن رسمه في مستوي أو على سطح كرة دون أن تتقاطع أضلاعه

الحل:

سنتبع نفس خوارزمية برهان المثال السابق



الشكل (5)

إن هذا الشكل منتظم لأن قدرة كل عقدة فيه مساوية لقدرات باقي العقد

نفرض جدلا" أن هذا البيان مستوي (يمكن رسمه في مستوي أو على سطح كرة دون أن تتقاطع أضلاعه)

وبما أنه مستوي فهو يحقق قانون أولر:

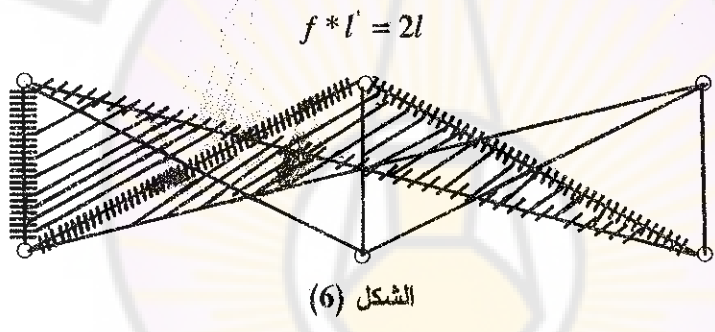
$$n - l + f = 2$$

إن : $l = 9, n = 6$ ولا نعلم f ماذا يساوي ولذلك:

$$6 - 9 + f = 2 \Rightarrow f = 5$$

وبالتالي هذا البيان يملك 5 وجوه وحسب فرضنا الجدلي هو يحقق القانون الثاني:

$$f * l' = 2l$$



الشكل (6)

سنختار الوجه المزخرف في الرسم وهو يحوي أربع أضلاع

(أي عدد الأضلاع المحيطة في هذا الوجه هي أربعة) $\Rightarrow$

$l = 9, i = 4, f = 5$

$$\left.\begin{array}{l} f * l' = 5 * 4 = 20 \\ 2 * l = 2 * 9 = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow 20 \neq 18$$

وبالتالي فرضنا الجدلي خاطئ وهو المطلوب

ملاحظة:

إن أي بيان يحتوي بيان جزئي $K_{3,3}$ أو بيان جزئي K_5 فإن هذا البيان غير مستوي.

مبرهنة (4)

ليكن لدينا البيان البسيط المستوي المترابط G فإنه يوجد في البيان G عقدة x بحيث $\deg(x) \le 5$.

البرهان

إذا كان $n < 3$ فإن المطلوب صحيح. لذلك نفرض أن $n \ge 3$.

حسب المبرهنة (2)، نجد أن $m \le 3*n-6$. نفرض أن مجموعة عقد البيان G هي $V = \{x_1,\ldots,x_n\}$ ونفرض أن $\deg(x) \ge 6$ من أجل أي عقدة $\forall x \in V$

وحسب المبرهنة (1) في الفصل الأول، نجد أن:

$$\deg(x_1),\ldots,\deg(x_n) = 2*m$$

إذاً، $2*m = \deg(x_1),\ldots,\deg(x_n) \ge 6+\ldots+ = 6*n$، فـإن $m \ge 3*n$. إذاً $3*n \le 3*n-6$ وبالتالي، فإن $0 \le -6$. وهذا تناقض، إذا فـإن $\deg(x) \le 5$. وهو المطلوب

تعريف:

أ- ليكن لدينا البيان البسيط $G = (V;E)$ عندئذ نحصل على تحويلاً ابتدائياً على G وفق إحدى الحالتين:

(i) إذا كانت العقدة $x \in V$ حيث $\deg(x) = 2$ وكان $(x,y),(x,z) \in E$ فإننا نحذف العقدة x وهذين الضلعين ثم نضيف الضلع (y,z).

(ii) إذا كان $(y,z) \in E$ فإننا نحذفه ونضيف عقدة x كما نضيف الضلعين (x,y) و (x,z).

ب–نقول إن البيان البسيط G يشاكل البيان البسيط H إذا أمكن الحصول على البيان H عن طريق إجراء عدد منته من العمليات الابتدائية على البيان G.

مبرهنة (5)

ليكن لدينا البيان G ، عندئذ، يكون البيان G بيان مستوٍ إذاً وفقط إذا كان البيان G لا يحتوي على بيان جزئي متشاكل مع البيان K_5 أو مع البيان $K_{3,3}$

تمارين

1- هل $K_{3,4}$ مستو ؟

2- ليكن لدينا البيان البسيط المستوي المترابط $G=(V;E)$ ، $|V|<12$ ، أثبت أنه توجد عقدة x بحيث $\deg(x)\leq 4$.

3- إذا كان $G\cong H$ و كان البيان G بيان مستوي، أثبت أن البيان H مستوٍ.

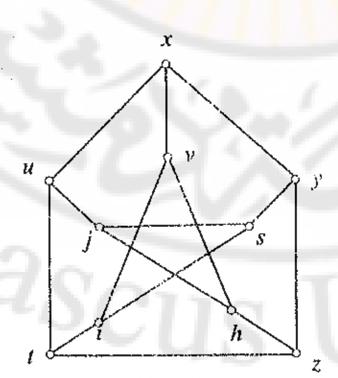
4- ليكن لدينا البيان المستوي المترابط $G=(V;E)$ بحيث $|V|=10$ و $|E|=20$. أوجد عدد أوجه G.

5- ليكن لدينا البيان المستوي المترابط G وقدرات عقده هي: 2,4,2,2,5,3,3,3,2,4,6 . أوجد عدد أوجه البيان G.

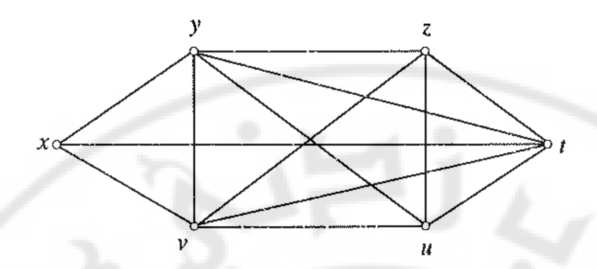
6- ليكن لدينا البيان المستوي المترابط المنتظم $G=(V;E)$ من الدرجة 9، ويحتوي على 20 وجه. أوجد عدد عقد البيان G.

في كل التمارين من 7 إلى 11 بين ما إذا كان البيان المعطى مستوياً.

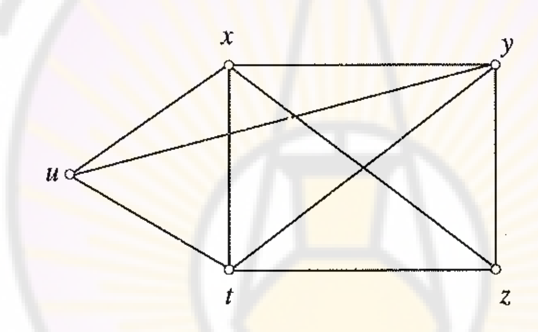
7-



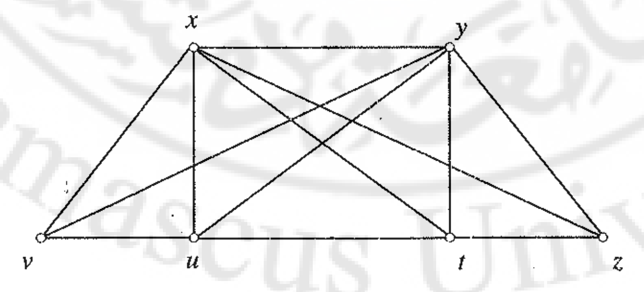
−8



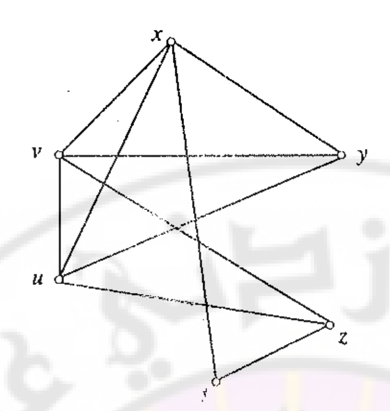
−9



−10



-11



12- ليكن لدينا البيان البسيط $G=(V;E)$ بحيث $|V|\geq 11$، أثبت أن البيان G غير مستوٍ أو $\overline{G}$ غير مستوٍ.

13- ليكن لدينا الشجرة T ، أثبت أن T بيانٌ مستوٍ.

14- ليكن لدينا البيان المستوي $G=(V;E)$ يحتوي على m ضلعاً، n عقدة ، f وجهاً و k مركبة، أثبت أن $n-m+f=k+1$.

الفصل التاسع

خوارزميات نظرية البيان
Graph Theory Algorithms

1- مفاهيم جبرية:

تعريف:

لتكن لدينا المصفوفتين التاليتين:

$$B=(b_{ij})_{\substack{i=1:n\\ j=1:n}}\ ,A=(a_{0j})_{\substack{i=1:n\\ j=1:n}}$$

نعرف عملية الجمع على المصفوفات كما يلي:

$$C=A\oplus B=(C_{ij})_{\substack{i=1:n\\ j=1:n}}$$

حيث: $c_{ij}=\min\{a_{ik}+b_{kj}\}$

مثال:

لتكن $A=\begin{bmatrix}2....3.....\infty\\ \infty....1.....4\\ 2.....1.....5\end{bmatrix}$ وَ $B=\begin{bmatrix}2....4....3\\ \infty....3....1\\ 4....\infty....0\end{bmatrix}$

$$c_{11}=\min\{2+2,3+\infty,\infty+4\}=\min\{4,\infty,\infty\}=4$$
$$c_{12}=\min\{2+4,3+3,\infty+\infty\}=\min\{6,6,\infty\}=6$$
$$c_{13}=\min\{2+3,3+1,\infty+0\}=\min\{5,4,\infty\}=4$$
$$c_{21}=\min\{\infty,\infty,8\}=8$$
$$c_{22}=\min\{\infty,4,\infty\}=4$$
$$c_{23}=\min\{\infty,2,4\}=2$$
$$c_{31}=\min\{4,\infty,9\}=4$$
$$c_{32}=\min\{6,4,\infty\}=4$$
$$c_{33}=\min\{5,2,5\}=2$$

$$\Rightarrow C = A \oplus B = \begin{bmatrix} 4.....6.....4 \\ 8.....4.....2 \\ 4....4.....2 \end{bmatrix}$$

تعريف:

لتكن A مصفوفة مربعة $n \times n$ عندئذ نعرف ما يلي:

$$A^1 = A \quad , \quad A^{k+1} = A^k \oplus A^1$$

مبرهنة (1)

A مصفوفة مربعة و $l, k \in IN$ عندئذ يكون:

$$A^{k+l} = A^k \oplus A^l$$

وسنجد بشكل خاص أن:

$$A^k \oplus A^l = A^l \oplus A^k$$

نبرهن ذلك بالاستقراء:

$$A^{k+i} = A^k \oplus A^i \;;\; A^{(k+i)+1} = A^{(k+i)} \oplus A^1 = \left(A^k \oplus A^i\right) + A^1$$
$$= A^k \oplus \left(A^i \oplus A^1\right) = A^k \oplus A^{(i+1)}$$

مبرهنة (2)

ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}$ ولتكن عقده $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ولتكن $B(\vec{G})$ هي مصفوفة أطوال أقواس هذا البيان نبني المصفوفة $B^m(\vec{G})$ وذلك وفق العملية $\oplus$ عملية عندئذ سيكون لعناصر المصفوفة $B^m(\vec{G})$ الشكل:

$$b_{ij}^m = \begin{cases} 0 \quad , & i = j \\ b_{ij} \quad , & \text{طول الطريق الأقصر الذي يصل بين } x_j, x_i \\ & \text{هو على الأكثر موجود ويساوي مجموع أطوال } m \text{ قوساً} \\ \infty \quad , & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

نتيجة:

ليكن $\vec{G}$ ولتكن $B_{n\times n}(\vec{G})$ فإذا كان $\vec{G}$ لا يملك طريقاً (باتجاه واحد) عدد أقواسه أكثر من $(n-1)$ عندئذٍ يكون ما يلي محققاً

$$B^{m}(\vec{G}) = B^{n-1}(\vec{G}) = D(\vec{G})$$

$D(\vec{G})$ مصفوفة الأبعاد

مبرهنة (3)

ليكن $\vec{G}$ بيان موجه يملك n عقدة، فإذا وجد عدد طبيعي مثل k بحيث يكون:

$B^{k+1}(\vec{G}) = B^{k}(\vec{G})$ عندئذٍ فإن:

$$B^{k}(\vec{G}) = D(\vec{G})$$

ملاحظة:

إن كل بيان يقابل مصفوفة وكل مصفوفة تقابل بيان.

2-خواص عملية الجمع المعرفة على المصفوفات

1- عملية الجمع المعرفة على المصفوفات غير تبديليه:

$$A \oplus B \neq B \oplus A$$

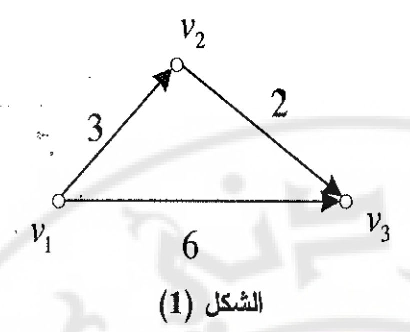
2- عملية الجمع المعرفة على المصفوفات تجميعية أي:

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

3-خوارزمية كاسكادا (cascade)

تمكن هذه الخوارزمية من إيجاد أقصر مسافة تفصل بين عقدتين في بيـــان موجة (حيث أن المسافة بين العقدتين إما مباشرة أو غير مباشرة)

مثال عليها:



الشكل (1)

فإن أقصر مسافة بين العقدتين v_1 و v_3 هي المسافة غير مباشرة لأن المسافة المباشرة 6 بينما المسافة غير المباشرة 5.

خطوات الخوارزمية:

1- ننشئ مصفوفة الأبعاد $W(D) = (d_{ij})_{\substack{i=1:n \\ j=1:n}}$ وفق ما يلي:

نعرف عناصر مصفوفة الأبعاد وفق ما يلي:

$$d_{ij} = \begin{cases} o.....if.....i = j \\ w_{ij}..if..\exists path..between..v_i and v_j \\ \infty.....if..\nexists path.between..v_i and v_j \end{cases}$$

(path يقصد بها طريق بين العقدتين v_j, v_i و w_{ij} هو الوزن (أو القيمة) المزود بها القوس بين العقدتين v_j, v_0)

2- نطوّر مصفوفة الأبعاد بحيث نحصل على المصفوفة التي تعطي المسافات الأصغرية بين العقد وذلك باستخدام المفهوم الجبري المذكور أعلاه.

أي نجمع المصفوفة لنفسها بشكل متتالي وفقد ما يلي:

$$W^2(D) = W(D) \oplus W(D)$$
$$W^3(D) = W^2(D) \oplus W(D)$$

وهكذا.........

بعد عدد منتهي من عمليات الجمع نحصل على المصفوفة الثابتة المطلوبة وهي مصفوفة الأبعاد الأصغرية:

$$W^{m}(D) = W^{m-1}(D)$$

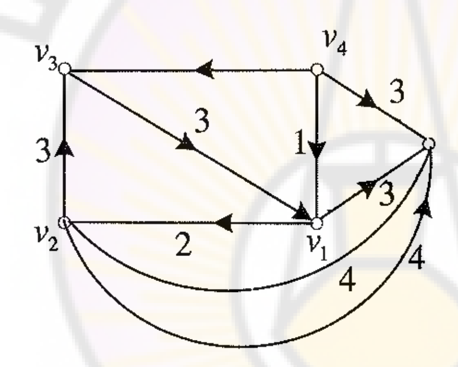
ملاحظة:

عند حساب المصفوفة $W^{i}(D)$ فإن:

$$\begin{aligned} W^{i}(D) &= W^{i-1}(D) \oplus W(D) \\ &\neq W(D) \oplus W^{i-1}(D) \end{aligned}$$

مثال:

ليكن لدينا البيان(الموزون) التالي:



الشكل (2)

أوجد المصفوفة الأبعاد الأصغرية في البيان:

أولاً: نوجد مصفوفة الأبعاد

$$W^{2}(D) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 4 \\ 3 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 2 & 0 & 3 \\ \infty & 4 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

نطوّر مصفوفة الأبعاد:

لنوجد $W^2(D)$

$$W^2(D)=W(D)\oplus W(D)=\begin{bmatrix}0&2&\infty&\infty&3\\\infty&0&3&\infty&4\\3&\infty&0&\infty&\infty\\1&\infty&2&0&3\\\infty&4&\infty&\infty&0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&2&\infty&\infty&3\\\infty&0&3&\infty&4\\3&\infty&0&\infty&\infty\\1&\infty&2&0&3\\\infty&4&\infty&\infty&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W^2(D)=\begin{bmatrix}0&2&5&\infty&3\\6&0&3&\infty&4\\3&5&0&\infty&6\\1&2&2&0&3\\0&4&7&\infty&0\end{bmatrix}$$

$$W^3(D)=W^2(D)\oplus W(D)$$

ومنه نجد:

$$W^3(D)=\begin{bmatrix}0&2&5&\infty&3\\6&0&3&\infty&4\\3&5&0&\infty&6\\5&7&2&0&3\\10&4&7&\infty&0\end{bmatrix}$$

فنجد أن: $W^4(D)=W^3(D)$، وبالتالي نكون قد حصلنا على مصفوفة الأبعاد.

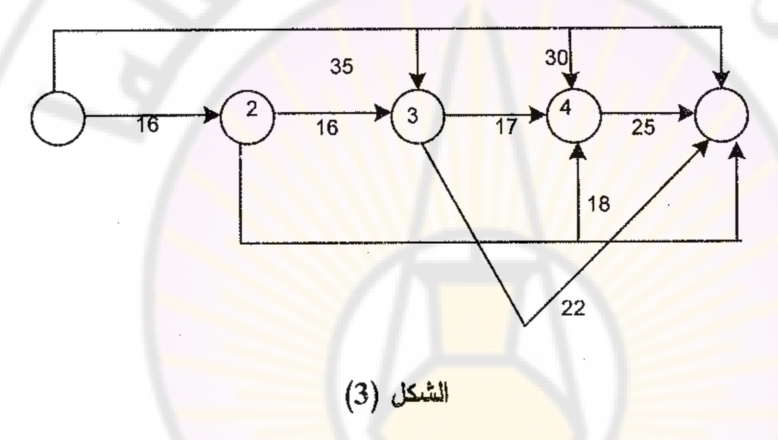
إذاً المسافة الأصغرية بين العقدة الأولى والعقدة الخامسة هي 3 . نلاحظ أنه يمكن الحصول على البعد الأصغري بين أي عقدتين من البيان.

ملاحظة:

إذا وجد عمود جميع عناصرها ∞ عدا أحد هذه العناصر كان صفر فهـذا يدل أنه لا يوجد أي قوس يدخل إلى هذه العقدة بشكل مباشر أو غير مباشر. في المثال العقدة V_4 هي عقدة هدف.

مثال :

ليكن لدينا البيان الموزون التالي:



الشكل (3)

أوجد مصفوفة الأبعاد التي تعطي أقصر مسافة بين أي عقدتين (أو أقل كلفة بين أي عقدتين).

الحل:

إن مصفوفة الأبعاد للبيان المعطى هي:

$$W(D)=\begin{bmatrix} 0 & 16 & 35 & 30 & 40 \\ \infty & 0 & 16 & 18 & 36 \\ \infty & \infty & 0 & 17 & 22 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 25 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} = L(D)$$

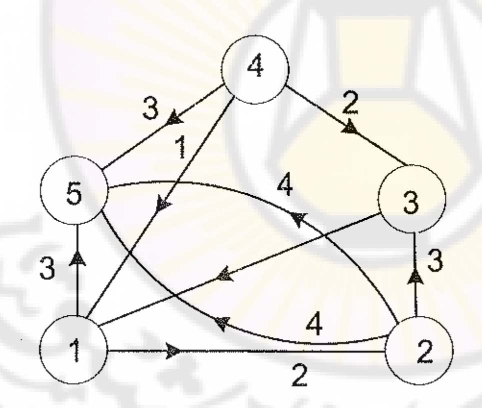
وبعد تنفيذ الخوارزمية نجد أن:

$$L(D)=\begin{bmatrix} 0 & 16 & 32 & 30 & 40 \\ \infty & 0 & 16 & 18 & 36 \\ \infty & \infty & 0 & 17 & 22 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 25 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

مثال:

ترغب إحدى الشركات بنقل مواد أولية من المصدر (1) (العقدة 1) إلى الهدف (العقدة 6)علماً أنه توجد عدة عقد بينية وأثناء النقل توجد عدة إمكانيات متاحة لنقل هذه البضائع وفق مسارات متعددة والمطلوب إيجاد المسار ذي الكلفة الأصغرية.

مثال:



الشكل (4)

$$B\left(\vec{G}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 4 \\ 3 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 2 & 0 & 3 \\ \infty & 4 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

بتطبيق الخوارزمية أعلاه سنجد:

$$B^2(\vec{G}) = B(\vec{G}) \oplus B(\vec{G})$$
$$B^3(\vec{G}) = B^2(\vec{G}) \oplus B(\vec{G})$$
$$B^4(\vec{G}) = B^3(\vec{G}) \oplus B(\vec{G})$$

وسيكون $B^4(\vec{G}) = B^3(\vec{G})$ أي أن:

$$B^3(\vec{G}) = D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & \infty & 3 \\ 6 & 0 & 3 & \infty & 4 \\ 3 & 5 & 0 & \infty & 6 \\ 5 & 7 & 2 & 0 & 3 \\ 10 & 4 & 7 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن العامود الرابع كل عناصره إما 0 أو ∞ وهذا يعني أن العقدة أربعة لا يمكن الوصول غليها (أي هي عقدة انطلاق).

4-خوارزمية ديجكستر (Dijkister)

تمكن هذه الخوارزمية من إيجاد المسار الأصغر (ذات الكلفة الأصغرية) بين عقدة المصدر وعقدة الهدف وتمكن أيضاً هذه الطريقة من إيجاد المسار الأصغر بين أي عقدتين.

أ- فرضيات الخوارزمية:

- $P(1) = 0$ وتمثل كلفة نقل البضائع من المركز (1) إلى المركز (0) وهي فعلاً صفر.
- $T(k) = \infty$ وهي الكلفة الافتراضية (التجريبية) لنقل البضائع من المركز (1) إلى المركز (k) (أي من العقدة (1) إلى العقدة (k)، أي

أن الكلفة في البداية غير معقولة وعند تطبيق الخوارزمية سنحصل على الكلفة المثالية المعقولة .

ملاحظة :

نعتبر الكلفة الافتراضية في البداية فقط ∞ أ ي أنها كلفة لانهائية وذلـك لعدم وجود كلفة تقديرية للنقل.

ب-خطوات تنفيذ الخوارزمية:

(حساب الكلفة التجريبية وكلفة النقل)

الخطوة الأولى: نحسب الكلفة التجريبية T(j) من العلاقة الرياضية:

$$T(j) = \min\{T(j)....,....p(k) + b_{kj}\}$$

هي الكلفة التجريبية لنقل البضائع مـن المركـز (0) إلـى المركـز (j) نحسبها من البيان أو من المصفوفة W(D) (وفي البداية تكون قيمتها ∞)

أما p(k) فهي كلفة النقل من المركز (1) إلى المركز (k)

b_{kj} هو القوس الواصل بين العقد j و k (ونوجدها من البيان)

الخطوة الثانية: نحسب كلفة النقل من المركز (1) إلى المركز (k) باستخدام العلاقة الرياضية:

$$p(k) = \min \{ T(k) , T(k+1) , ..., T(n) \}$$

نطبق خوارزمية ديجكستر على المثال السابق:

- نحسب قيم الأقواس b_{kj} (لاستخدامها في الخوارزمية):

$b_{12} = 16$, $b_{13} = 35$, $b_{14} = 30$, $b_{15} = 40$

ولدينا : p(1) = 0 قيمة النقل من المركز (1) إلى المركز (1)

ولدينا: T(j) = ∞ وهي قيمة افتراضية.

حساب $p(2)$:

$$T(2) = \min\{T(2)..,..p(1) + bij\}$$

وهي كلفة تجريبية لنقل البضائع من 1 إلى 2 وبداية هي ∞

$$T(2) = \min\{\infty\ , 0 + 16\} = 16 \Rightarrow T(2) = 16$$

$$T(3) = \min\{T(3), p(1) + b_{13}\} = \min\{\infty.,0 + 35\} = 35 \Rightarrow T(3) = 35$$

وهكذا.... $T(4) = \min\{\infty.,0 + 30\} = 30 \Rightarrow T(4) = 30$

$$T(5) = \min\{\infty.,0 + 40\} = 40 \Rightarrow T(5) = 40$$

$$p(2) = \min\{T(2), T(3), T(4), T(5)\}$$

$$= \min\{16,35,30,40\} = 16 \Rightarrow p(2) = 16$$

وهي كلفة النقل من المركز (1) إلى المركز (2).

لنحسب قيم الأقواس b_{ij}:

$b_{25} = 36$ ، $b_{24} = 18$, $b_{23} = 16$

ولدينا $p(2) = 16$:

$$T(2) = 16\ , T(3) = 35\ , T(4) = 30\ , T(5) = 45$$

لنوجد $P(3)$:

$$T(3) = \min\{T(3), p(2) + b_{23}\}$$

$$= \min\{35,16 + 16\} = \min\{35,32\} = 32 \Rightarrow T(3) = 32$$

$$T(4) = \min\{T(4), p(2) + b_{24}\} = \min\{30,16 + 18\} = 30 \Rightarrow T(4) = 30$$

$$T(5) = \min\{T(5), p(2) + b_{25}\} = \min\{40,16 + 36\} = 40 \Rightarrow T(5) = 40$$

وهكذا نجد $p(3) = \min\{T(3), T(4), T(5)\} = \min\{32,30,40\}$

$$\Rightarrow p(3) = 30$$

وهي كلفة النقل الأصغرية بين المركز (1) والمركز (3)

لنحسب الأقواس b_{3j} فنجد:

$b_{34} = 17 \quad , \quad b_{35} = 22$

لدينا $P(3) = 30$ و $T(3) = 32$, $T(4) = 30$, $T(5) = 40$

وبالتالي فإن :

$$T(4) = \min\{T(4), p(3) + b_{34}\} = \min\{30, 30 + 17\} = 30 \Rightarrow T(4) = 30$$

$$T(5) = \min\{T(5), p(3) + b_{35}\} = \min\{40, 30 + 22\} = 40 \Rightarrow T(5) = 40$$

$$p(4) = \min\{T(4), T(5)\} = \min\{30, 40\}$$

$$\Rightarrow p(4) = 30$$

ومنه كلفة النقل الأصغرية بين المركز (1) والمركز (4) هي 30

لإيجاد P(5) لدينا القوس $b_{45} = 25$:

$$T(5) = \min\{T(5), p(4) + b_{45}\}$$

$$= \min\{40, 30 + 25\} = \min\{40, 55\} = 40$$

$$\Rightarrow T(5) = 40$$

$$p(5) = \min\{T(5)\} = \min\{40\}$$

$$\Rightarrow p(5) = 40$$

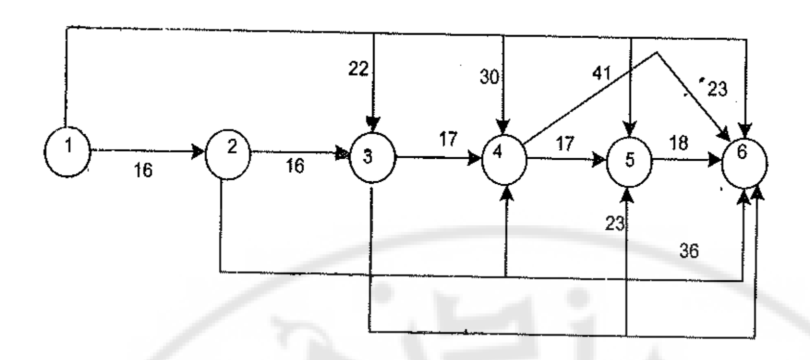
وهي الكلفة الأصغرية النهائية للنقل بين المركز (1) والمركز (5)

ملاحظة :

إن P(n) تعبر عن الكلفة النهائية أي هي كلفة النقل من المركز (1) إلى المركز (n) وهي تطابق T(n)، أما الكلف المحسوبة p(i) (حيث $0 < i < n$) فهي كلف وسيطة مساعدة لحساب الكلفة من المصدر إلى الهدف .

مثال:

أوجد أقصر مسار بين العقدة (1) والعقدة (6)، وذلك باستخدام خوارزمية كاسكادا وخوارزمية ديجكستر (وتحقق من صحة النتيجة بالمطابقة بين النتيجتين).



الشكل (5)

الحل:

أولاً: الحل باستخدام خوارزمية كاسكادا.

أول خطوة تكتب مصفوفة الأبعاد $w(D)$ وهي:

$$W(D) = (w_{ij}) \quad , \quad w_{ij} = \begin{cases} o......if.....i = j \\ w_{ij}....if..\exists path..between.i.and.j \\ \infty.....if..\nexists path.between.i.and.j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{W}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59 \\ \infty & 0 & 16 & \infty & \infty & 41 \\ \infty & \infty & 0 & 17 & 23 & 31 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

نطور هذه المصفوفة بحيث نصل إلى مصفوفة الأبعاد التي تعطي المسافات الأصغرية بين العقد وذلك من خلال تحقيق العلاقة:

$$W^m(D) = W^{m-1}(\boldsymbol{D}) \oplus W(D)$$

$$W^m(D) = W^{m-1}(\boldsymbol{D})$$

$$W^2(D) = W(D) \oplus W(D)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59\\ \infty & 0 & 16 & \infty & \infty & 41\\ \infty & \infty & 0 & 17 & 23 & 31\\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59\\ \infty & 0 & 16 & \infty & \infty & 41\\ \infty & \infty & 0 & 17 & 23 & 31\\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W^2(D)=\begin{bmatrix}0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59\\ \infty & 0 & 16 & 33 & 39 & 41\\ \infty & \infty & 0 & 17 & 23 & 31\\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $W^2(D)\neq W(D)$ وبالتالي نستمر بالجمع حتى نحصل على مصفوفة $W^m(D)$ تساوي التي قبلها $W^{m-1}(D)$ فإن حصلنا عليها فتكون هذه المصفوفة هي التي تعطي المسافات الأصغرية بين العقد.

ولنحسب $W^3(D)$ حيث: $W^3(D)=W^2(D)\oplus W(D)$

$$\Rightarrow W^3(D)=\begin{bmatrix}0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59\\ \infty & 0 & 16 & 33 & 39 & 41\\ \infty & \infty & 0 & 17 & 23 & 31\\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59\\ \infty & 0 & 16 & \infty & \infty & 41\\ \infty & \infty & 0 & 17 & 23 & 31\\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W^3(D)=\begin{bmatrix}0 & 16 & 22 & 30 & 41 & 59\\ \infty & 0 & 16 & 33 & 39 & 41\\ \infty & \infty & 0 & 17 & 23 & 31\\ \infty & \infty & \infty & 0 & 17 & 23\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 18\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0\end{bmatrix}=W^2(D)$$

وبالتالي إن $W^3(D)$ أو $W^2(D)$ هي المصفوفة التي تعطي الأبعاد الأصغرية بين عقد البيان السابق وذلك يحسب خوارزمية كاسكادا.وبالتالي فإن البعد الأصغري (أقصر مسافة) بين العقدة (1) والعقدة (6): 53

وبالعودة إلى البيان نجد أن هناك طريقتين يمثلان المسار الأصغر بين (1)و(6) وهما:

$$(1) \xrightarrow{22} (3) \xrightarrow{31} (6)$$

أو

$$(1) \xrightarrow{30} (4) \xrightarrow{23} (6)$$

ثانياً: باستخدام خوارزمية ديجكستر.

في البداية نفرض أن: $P(1) = 0$ وهي تمثل كلفة النقل بين العقدة (1) والعقدة (1) و $T(K) = \infty$ وهي تمثل كلفة النقل الافتراضية (البدائية) من العقدة (1) إلى العقدة (K)

أي أننا نفرض أنه في البداية كان:

$$T(1) = T(2) = T(3) = T(4) = T(5) = T(6) = \infty$$

لدينا$P(1) = 0$ ولنحسب الأقواس:

$$b_{12} = 16 \quad , \quad b_{13} = 22 \quad , \quad b_{14} = 30 \quad , \quad b_{15} = 41 \quad , \quad b_{16} = 59$$

ولنحسب T(k) حيث أن :

$K = 2 , 3 , \ldots\ldots, 6$ من العلاقة:

$$T(2) = \min\{T(2), p(1) + b_{12}\} = \min\{\infty.,0 + 16\} = 16$$

حيث $p(1) = 0$

القيمة الافتراضية التي افترضناها في البداية لانهائية

$$T(3) = \min\{T(3), p(1) + b_{13}\} = \min\{\infty.,0 + 22\} = 22$$

$$T(4) = \min\{T(4), p(1) + b_{14}\} = \min\{\infty.,0 + 30\} = 30$$

$$T(5) = \min\{T(5), p(1) + b_{15}\} = \min\{\infty.,.0 + 41\} = 41$$

$$T(6) = \min\{T(6), p(1) + b_{16}\} = \min\{\infty.,.0 + 59\} = 59$$

ولنحسب الآن p(2) وهي كلفة النقل من العقدة (المركز) (1) إلى العقـــدة (المركز) (2) من خلال العلاقة :

$$p(k) = \min\{T(k), T(k+1), \dots\dots\dots, T(n)\}$$

حيث أن n هي عدد العقدة في البيان وهي في هذا التمرين : n=6

$$p(2) = \min\{T(2), T(3), T(4), T(5), T(6)\}$$

$$= \min\{16, 22, 30, 41, 59\} = 16$$

$$\Rightarrow p(2) = 16$$

لدينا p(2) =16 ولنحسب الأقواس :

$$b_{23} = 16 \quad , \quad b_{24} = \infty \quad , \quad b_{25} = \infty \quad , \quad b_{26} = 41$$

ولنحسب T(k) حيث أن :

$$T(3) = \min\{T(3), p(2) + b_{23}\}$$

القيمة التي حسبناها قبل قليل

$$= \min\{22, 16 + 16\} = 22$$

$$T(4) = \min\{30, 16 + \infty\} = 30$$

$$T(5) = \min\{41, 16 + \infty\} = 41$$

$$T(6) = \min\{59, 16 + 41\} = \min\{59, 57\} = 57$$

أما p(3) فهي :

$$p(3) = \min\{22, 30, 41, 57\} = 22$$

$$\Rightarrow p(2) = 22$$

لدينا 22 = p(3) ولنحسب الأقواس :

$$b_{34} = 31 \quad , \quad b_{35} = 23 \quad , \quad b_{36} = 31$$

ولنحسب T(k) حيث أن : $K = 4, 5, 6$

$$T(4) = \min\{T(4), p(3) + b_{34}\} = \min\{30, 22 + 31\} = 30$$

$$T(5) = \min\{41, 22 + 23\} = 41$$

$$T(6) = \min\{57, 22 + 31\} = \min\{57, 53\} = 53$$

ولنحسب P(4) وهي :

$$p(4) = \min\{30, 41, 53\} = 30$$

$$\Rightarrow p(4) = 30$$

لدينا 30 = P(4) ولنحسب الأقواس :

لنحسب T(k) حيث أن K = 5,6

$$\Rightarrow T(5) = \min\{41, 30 + 17\} = 41$$

$$T(6) = \min\{53, 30 + 23\} = \min\{53, 53\} = 53$$

أما P(5) فهي :

$$p(5) = \min\{41, 53\} = 41$$

$$\Rightarrow p(5) = 41$$

لدينا 41 = P(5) ولدينا القوس: $b_{56} = 18$

لنحسب T(6) :

$$T(6) = \min\{T(6), p(5) + b_{56}\}$$

$$= \min\{53, 41 + 18\} = 53$$

ولنحسب P(6):

$$p(6) = \min\{T(6)\} = T(6) = 53$$

$$\Rightarrow p(6) = 53$$

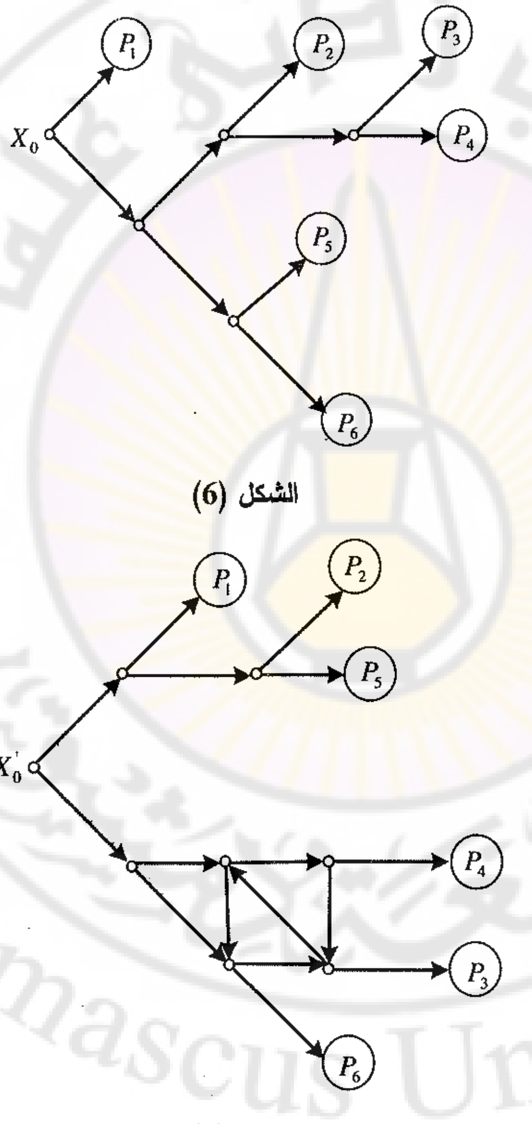
وهي تمثل كلفة النقل الأصغرية (أو أقصر طريق بين العقدة (1) والعقدة (6) نفس القيمة التي حصلنا عليها من خوارزمية كاسكادا.وبالعودة للبيان نجد أن هناك طريقتين تكون كلفة النقل فيهما بين (1) و (6) هي: 53

$$(1)\ \xrightarrow{22}\ (3)\ \xrightarrow{31}\ (6)$$

أو

$$(1)\ \xrightarrow{30}\ (4)\ \xrightarrow{23}\ (6)$$

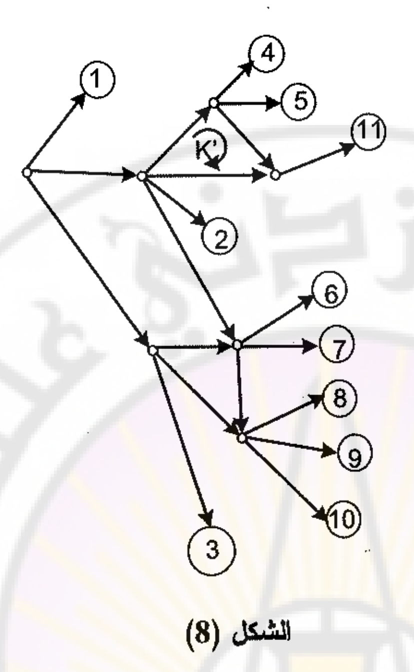
5- خوارزمية إيجاد أطول طريق



الشكل (6)

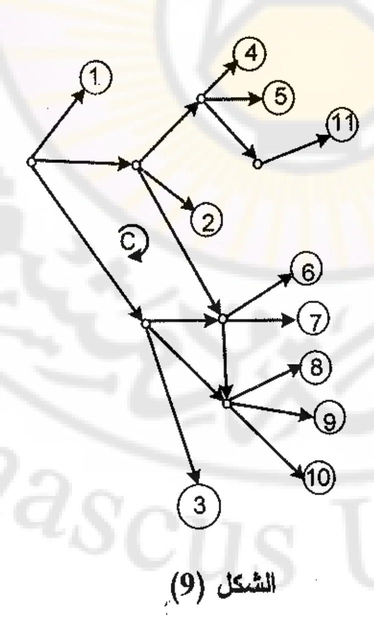
الشكل (7)

الخطوة 1



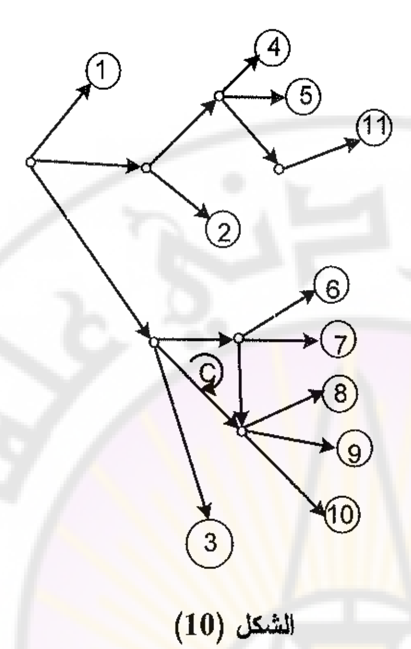
الشكل (8)

الخطوة 2



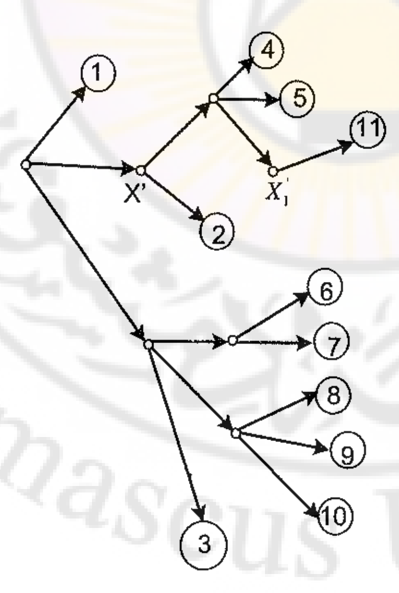
الشكل (9)

الخطوة 3



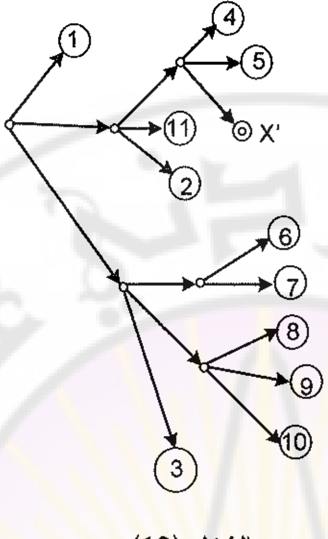
الشكل (10)

الخطوة 4



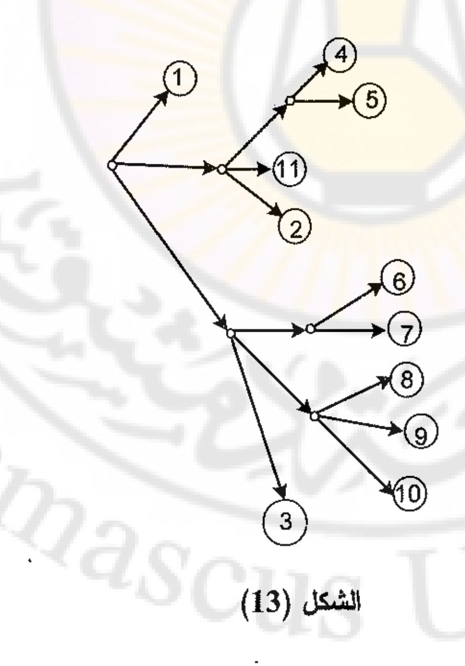
الشكل (11)

الخطوة 5



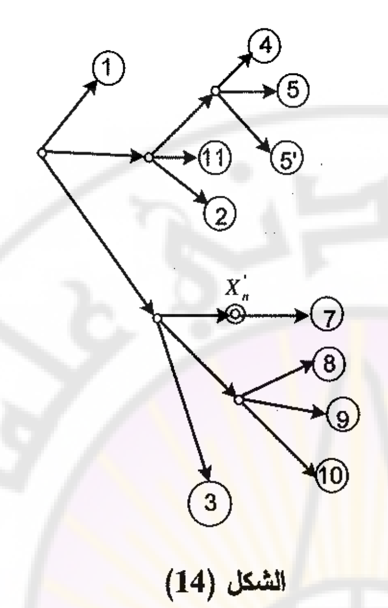
الشكل (12)

الخطوة 6



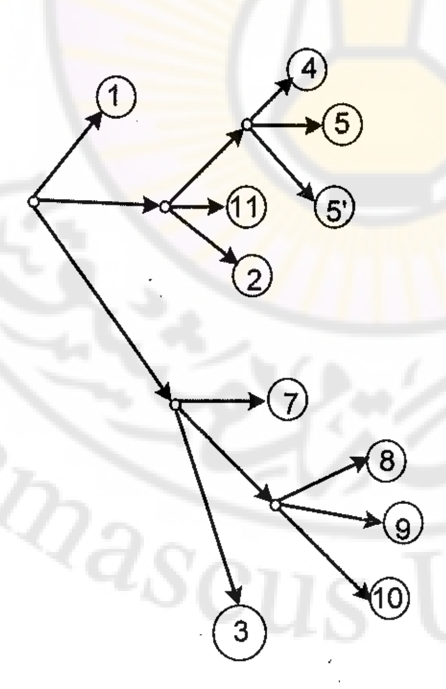
الشكل (13)

الخطوة 7



الشكل (14)

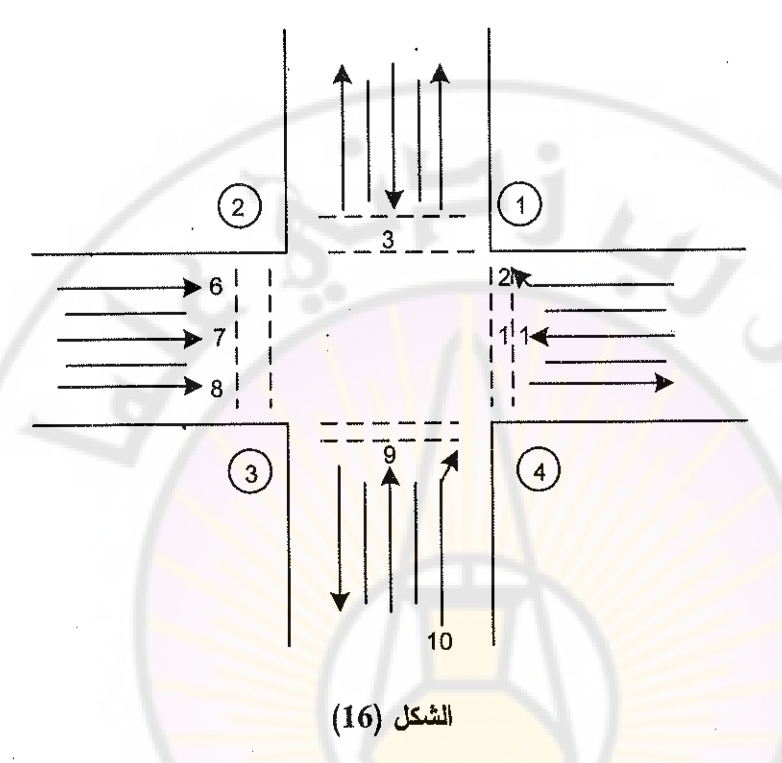
الخطوة 8



الشكل (15)

6- تطبيق نظرية البيان في مجال تنظيم السير

ليكن لدينا تقاطع طريق يتضمن ممرات للمشاة



الشكل (16)

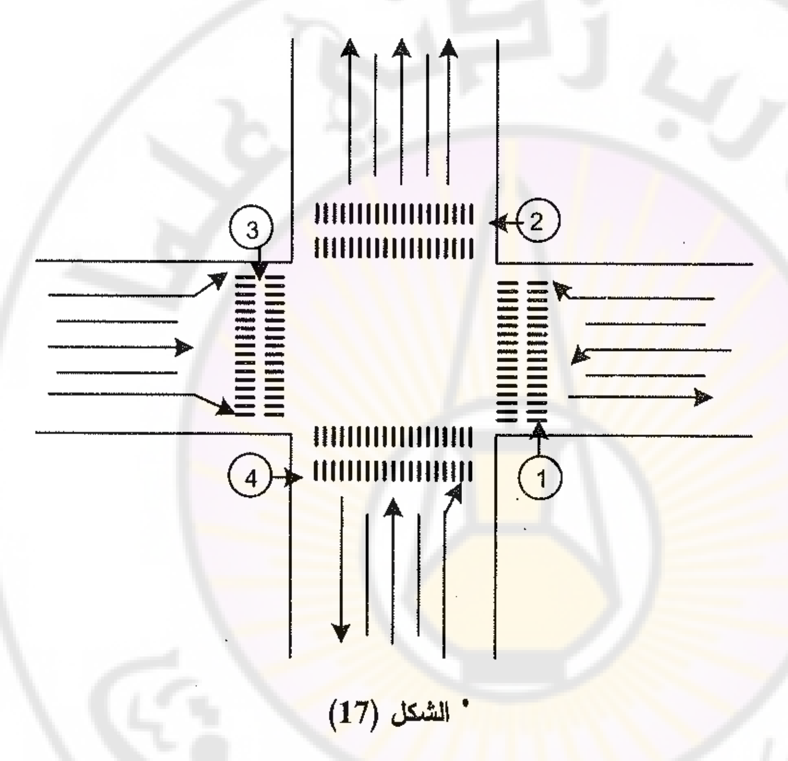
واتجاهات السير موضحة وفق الأسهم في الشكل ، علماً أن الإشارات ضوئية هي في الشكل 1 و2 و 3 و4 والمطلوب:

1- ارسم البيان الموافق لهذه المسألة وأوجد مجموعات الحل المثالي لهذه المسألة وضع أولويات المرور (الإشارة الحمراء تخص المشاة والإشارة الخضراء تخص السير).

2- ما هي إمكانية تغيير اتجاهات المرور في هذا التقاطع بحيث يكون تدفق السير أعظمي (أي يمكن مرور أكبر كمية ممكنة من السيارات في أقل فترة ممكنة)

لدينا 13 عنصر فنضع 13 عقدة

نوجد المجموعات التي تكون خضراء مع بعضها وكل مجموعتين (عنصرين) لا يحق لها أن تكون خضراء مع بعضها سنقابل عقدتين بينهما ضلع وبهذه الطريقة نرسم البيان المطلوب.



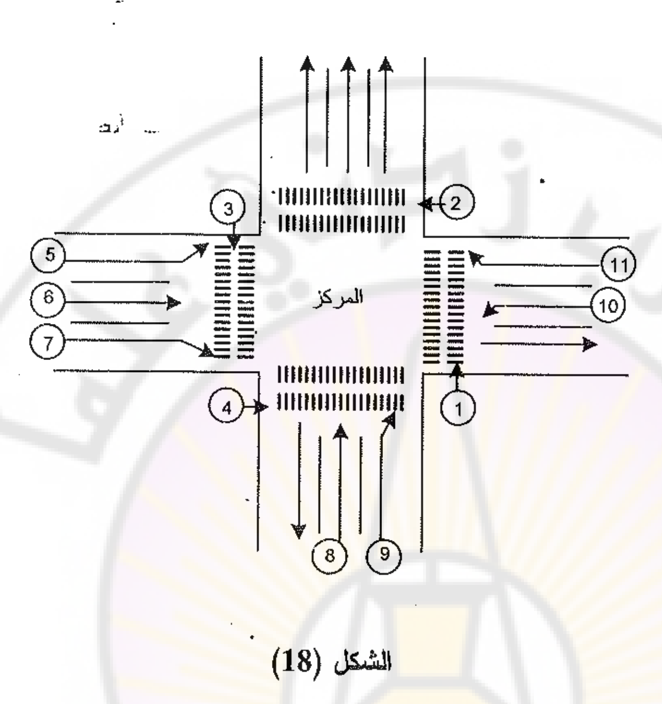
الشكل (17)

سنرسم البيان الموافق للمسألة المطلوبة كما يلي:

عقد البيان هي: ممرات المشاة الأربع ستقابل أربع عقد: A_1, A_2, A_3, A_4

كل عنصر (أي سهم) يأتي (أو يتجه) إلى المركز سيقابل عقدة من عقد البيان ومنه يكون لدينا: $A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 A_{10} A_{11}$

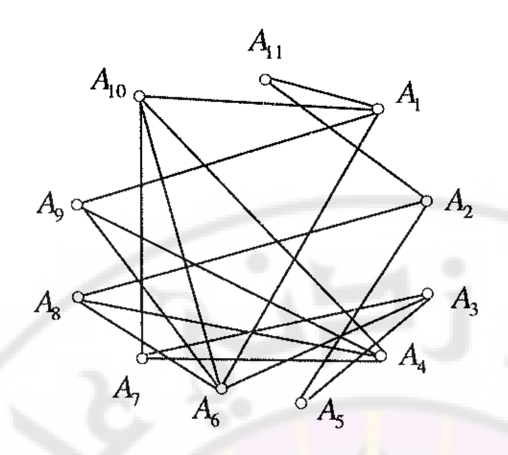
كما في الشكل التالي:



الشكل (18)

أضلاع البيان: كل عنصرين لا يستطيعان السير بآن واحد سيكون بينهما ضلع وإلا فلا يكون بين العقدتين الموافقتين لهما ضلع. مثلاً (9) و (8) يستطيعان السير مع بعضهما (عندما الإشارة خضراء) ⇐ لا يوجد بين العقدة A_9 و A_8 ضلع . أما: (8) و (4) فلا يستطيعان السير مع بعضهما (فعندما تكون الإشارة خضراء لا يستطيع أحد المشاة السير على ممر المشاة) ⇐ يوجد ضلع بين A_8 و A_4

وبهذا الشكل نرسم البيان:



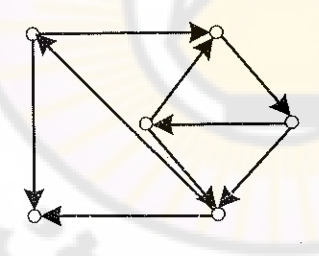
الشكل (19)

7- تمثيل البيانات الموجه في الحاسوب

لتمثيل البيانات الموجه في الحاسوب يوجد طريقتين:

الطريقة الأولى (حساب عدد الأقواس الداخلة على العقدة):

ليكن لدينا البيان الموجه المعطى بالشكل (20) :

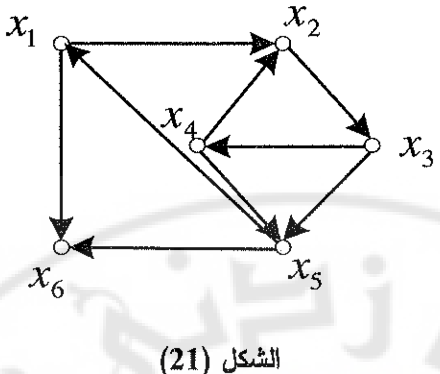


الشكل (20)

نخزن القوائم الخاصة بالبيان المعطى حاسوبياً كما يلي:

الخطوة الأولى:

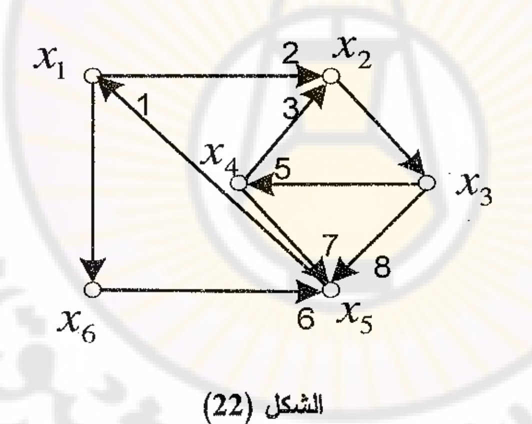
نرقم عقد البيان عشوائياً وفق نظام ما فينتج ما يلي:



الشكل (21)

الخطوة الثانية:

نرقم الأقواس الداخلة إلى العقد أيضاً بشكل عشوائي وبدءاً من العقدة الأولى ثم العقدة الثانية وهكذا ..... حتى نكون قد رقمنا جميع الأقواس التي في البيان فينتج ما يلي:



الشكل (22)

الخطوة الثالثة:

نشكّل القوائم وفق ما يلي:

ينتج لدينا مجموعتين من القوائم هما:

المجموعة الأولى:

قائمة الأقواس k وقائمة عقد المصدر ونرمز لها بـ: VL[k] حيث أن كل قوس داخل إلى كل عقدة يقابل عقدة المصدر لهذا القوس ، عندئذ يكون:

(قائمة الأقواس) K = 1 2 3 4 5 6 7 8 9

VL(k) = 5 1 4 2 3 6 4 3 1

لعقدة رقم 1 (x_1) لعقدة رقم 5 (x_5) قائمة العقد المصدر لتلك الأقواس

قائمة أدلة الأقواس بالدليل الأصغر:

تحوي قائمة الأقواس m +1 عنصر (m قوس) علماً أن القوس الزائد في هذه القائمة هو عنصر مساعد وهمي (لا وجود له في البيان).

المجوعة الثانية:

قائمة العقد ونرمز لها بـ i وقائمة الأقواس الداخلة على العقدة ونرمز لها بـ: IVL(i) حيث ناخذ القوس الداخل على العقدة i القوس ذو الدليل الأصغر في البيان الموجه.

تحوي قائمة العقد n+1 عنصر (n+1 عقدة مع أن البيان فيه n عقدة) والعقدة الزائدة هي عقدة مساعدة وهمية .

والقائمة IVL(i) تمثل قائمة أدلة الأقواس الداخلة بالعقدة i والتي تحمل الدليل الأصغر.

ملاحظة:

إن العقدة الوهمية تساعد في حساب قدرة العقد بالنسبة للأقواس الداخلة وتساعد في إغلاق القوائم.

وبتشكيل القائمة IVL(i) بالنسبة للبيان الموجه السابق نجد:

(قائمة العقد) $i = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad / 7 \quad \rightarrow$ وهمية

$IVL(i) = 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 9 \quad / \; 10 \quad \rightarrow$ وهمي

حيث العقدة x_2 يدخل فيها القوس 2 والقوس 3 ولكن الذي دليله أصغر هو 2

تحقق القوائم العلاقة التالية:

عدد الأضلاع الداخلة في $\leftarrow$ $r^-(x_i) = IrL[x_{i+1}] - IrL[x_0]$, i=: n
العقدة x_i

وبتطبيق هذه العلاقة ، نجد أن عدد الأقواس الداخلة في العقدة x_1 هو:

$$r^-(x_1) = IrL[x_2] - IrL[x_1]$$

$$= 2 - 1 = 1$$

عدد الأقواس الداخلة إلى العقدة x_5 هو:

$$r^-(x_5) = IrL[x_6] - IrL[x_5]$$

$$= 9 - 6 = 3$$

مثال:

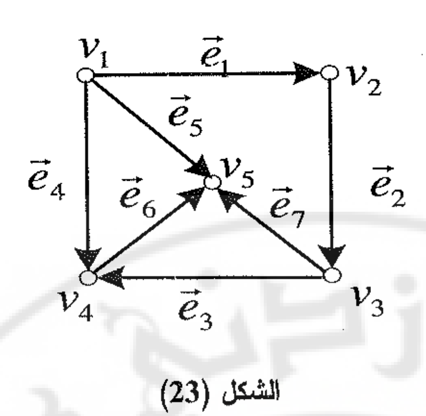
ليكن لدينا البيان الموجه التالي: $\vec{G}(r, \vec{E})$

اكتب قوائم البيان الموجه المعطى الشكل (23) التالية:

IVL[k] , VL[i] , k , i

ثم أوجد عدد الأقواس الداخلة إلى كل عقدة:

$$r^-(v_i) = IrL[i+1] - IrL[0]$$



الشكل (23)

الحل:

تمثل i قائمة الأقواس و k قائمة العقد.

i =	1	2	3	4	5	6	7
VL[i] =	1	2	3	1	1	4	3
(قائمة العقد) k =	1	2	3	4	5	/ 6	
IVL[k] =	1	1	2	3	5	/ 8	

ملاحظة:

في إيجاد قائمة الأقواس ذات الدليل الأصغر نحن نأخذ العقدة ونوجد القوس صاحب الدليل الأصغر الذي يدخل في هذه العقدة.

ولكن إذا وجدنا عقدة لا يدخل فيها أي قوس (مثل العقدة الأولى في البيان المعطى) فننتقل للعقدة التي بعدها ونوجد القوس صاحب الدليل الأصغر الذي يدخل فيها ونختاره لكل من العقدتين (مثلما فعلنا في المثال السابق وفي حال كانت أيضاً العقدة التي بعدها لا يدخل فيها ولا قوس فننتقل إلى العقدة التي تليها وهكذا.....

ومن أجل العقدة v_1: $r^-(v_1) = IrL[1+1] - IrL[1]$

$$= 1 - 1 = 0$$

لا يوجد أي قوس يدخل في العقدة v_1

ومن أجل v_2: $r^-(v_2) = IrL[2+1] - IrL[2]$

$= 2 - 1 = 1$

يدخل قوس واحد إلى العقدة v_2 وهو $\vec{e}_1$ وهكذا نجد أن العلاقة محققة لجميع عقد البيان.

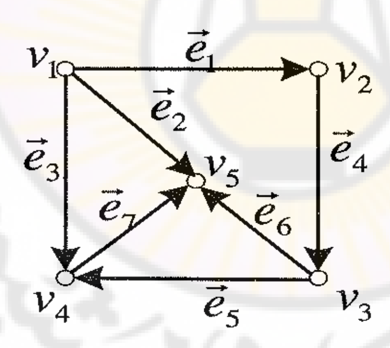
الطريقة الثانية(حساب عدد الأقواس الداخلة على العقدة):

نرقم عقد وأقواس البيان وفق ما يلي:

يجب إعادة ترقيم الأقواس في هذا البيان لأن هذه الطريقة في الترقيم هي المعاكسة تماماً للطريقة السابقة. يوجد لدينا مجموعتين من القوائم

المجموعة الأولى:

نرقم الأقواس الخارجة من العقد وفق ترتيب محدد:



الشكل (24)

إن القائمة i هي قائمة الأقواس و القائمة NF[i] هي قائمة عقد الهدف (أي أن: NF[i] هي العقد التي دخل فيها القوس i) فيكون:

i =	1	2	3	4	5	6	7
NF[i] =	2	5	4	3	4	5	5

المجوعة الثانية:

القائمة k هي قائمة العقد (ولا ننسى أن نضع عقدة وهمية في نهاية القائمة) و INF[k] هي قائمة الأقواس الخارجة من العقد ولكن بالدليل الأصغر أي أن القوس INF[k] القوس الخارج من العقدة k ولكن صاحب أصغر دليل من بين الأقواس الخارجة من العقدة k فيكون:

k =	1	2	3	4	5	/ 6
INF[k] =	1	4	5	7	8	/ 8

حيث أن العقد الأولى يخرج منها ثلاث أقواس هي: $\vec{e}_1$، $\vec{e}_2$ ، $\vec{e}_3$ ولكن صاحب الدليل الأصغر من بينها هو $\vec{e}_1$

ملاحظة:

أيضاً في هذه الخوارزمية عندما نجد عقدة k لا يخرج منها ولا قوس مثل العقدة الخامسة في البيان السابق فننظر للعقدة التي تليها: k+1 ونوجد INF[k+1] ونضعه نفسه INF[k] وفي مسألتنا السابقة كان INF[k+1] هو8 لأنه دليل القوس الذي يخرج من العقدة الوهمية k=6 (الدليل الأصغر) هو عدد الأضلاع +1 ويساوي 8 فوضعناه نفسه عند العقدة 5 .

نطبق العلاقة: $r^{+}(v_i) = INF[v_{i+1}] - INF[v_i]$ على المثال السابق من أجل كل i .

8- المسألة التدفق الأعظمي

ليكن لدينا بيان موجه ذو أقواس موزونة $\vec{G}(X,\vec{E})$ ولنرمز لقدرة القوس $\vec{e} \in \vec{E}$ بالرمز $c(\vec{e})$ حيث $c(\vec{e}) \geq 0$. لنفرض S,Q عقدتين من هذا البيان حيث Q منبع (المصدر) و S الهدف (مصب) علماً بأنه لا توجد قوس في هذا البيان يربط بينهما مباشرة.

أوجد دالة قوسية $\varphi(\vec{e})$ تحقق ما يلي:

1. $\forall \vec{e} \in \vec{E} \quad 0 \le \varphi(\vec{e}) \le c(\vec{e})$

2. في كل عقدة p من البيان الموجه $\vec{G}$ (باستثناء المنبع والمصب) يتحقق شرط كيرشوف للتدفق:

$$\sum_{\vec{e}\in W^{+}(p)} \varphi(\vec{e}) = \sum_{\vec{e}\in W^{-}(p)} \varphi(\vec{e}) \quad \forall p\in X / \{Q,S\}$$

حيث $W^{+}(p)$ مجموعة الأقواس الداخلة إلى p و $W^{-}(p)$ مجموعة الأقواس الخارجة من p.

3. من بين كل الدوال التي تحقق الشرطين السابقين انطلاقاً من Q تحقق الأعظمية أي:

$$\sum_{\vec{e}\in W^{+}(p)} \varphi(\vec{e}) = \sum_{\vec{e}\in W^{-}(p)} \varphi(\vec{e}) \rightarrow MAX$$

أن الشرط $c(\vec{e}) \ge 0$ يضمن لنا وجود تيار أو تدفق يحقق الشرط الأول ويكفي لتحقيق الشرط الثاني.

التدفق الذي يحقق الشرطين الأول و الثاني يقودنا إلى ما يسمى نظرية الأمثليات من كل دوال التدفق $\{\varphi(e)\}$ نختار دالة التدفق الذي تحقق الأعظمية من العقدة Q إلى العقدة S علما أننا نفترض أنه لا يوجد أي قوس يدخل إلى Q وأي قوس يخرج من S وذلك دون نمس عمومية هذه المسألة.

من أجل تبسيط هذه المسألة نضيف القوس $\vec{e}_0$ الذي يربط المنبع والمهبط: $\vec{e}_0 = (S,Q)$ يخرج من S إلى Q علماً بأن قدرة هذا القوس $c(\vec{e}_0) = \infty$.

صياغة أخرى:

ليكن لدينا بيان $\vec{G}=(x,\vec{E})$ موجه وموزون علماً أن قدرة أي ضلع $c(e)\geq 0$ وذلك $\forall e\in \vec{E}$.

ليكن في البيان الموجه $\vec{G}$ عقدتان S,Q وكذلك ضلع $\vec{e}_0=(S,Q)$ حيث $c(\vec{e}_0)$ (ندعوه $\vec{e}_0$ قوساً تراجعياً). وليكن عدد الأقواس الخارجية من S مساوياً عدد الأقواس الداخلية إلى Q ويساوي القوس $\vec{e}_0$ فقط:

$$W^+(S)=W^-(Q)=\{\vec{e}_0\}$$

المطلوب إيجاد تابع قوسي $L(\vec{e})$ من أجله يكون:

1. $0\leq \varphi(\vec{e})\leq c(\vec{e}) \qquad \forall \vec{e}\in \vec{E}$

2. $\sum_{\vec{e}\in W^+(p)}\varphi(\vec{e}) = \sum_{\vec{e}\in W^-(p)}\varphi(\vec{e}) \qquad \forall p\in X$

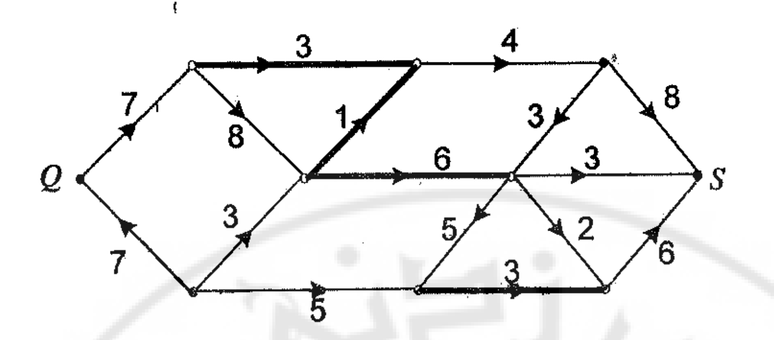
3. $\varphi(\vec{e}_0)\longrightarrow \max$

يمكن تعميم هذه المسألة بحيث يكون لدينا أكثر من منبع وأكثر من مصب علماً أنه يجب الوضع في الحسبان أن المجموع على كل المنابع للطاقات المتوجهة نحو المصاب أعظمية.

مثال:

لتكن لدينا الشبكة التالية:

واضح أن التدفق الأعظمي هو 14 (ما يخرج من المنبع).



الشكل (25)

9- نظرية فورد-فولكرزون:

ليكن $\vec{G}=(V,\vec{E})$ شبكة تملك كل قوس فيها قدرة $c(\vec{e})\geq 0$ ولتكن $S,Q\in V$ عقدتين يربط بينهما الضلع $\vec{e}_0=(S,Q)$ حيث $c(\vec{e}_0)=\infty$ علماً أنه الضلع الوحيد الذي يدخل إلى Q والضلع الوحيد الذي يخرج من S أي:

$$W^{+}(S)=W^{-}(Q)=\{\vec{e}_0\}$$

تعريف:

ندعو مجموعة الأضلاع $\vec{L}\subseteq\vec{E}$ مقطع من البيان الموجه $\vec{G}$ إذا استطعنا فصل مجموعة العقد V إلى مجموعتين $V=\{A,B\}$ بحيث يكون $A\cap B=\Phi$ وبحيث أن: $S\in B$ و $Q\in A$ وأن المجموعة $\vec{L}$ مكونة من **الأقواس** $\vec{e}=(x_1,x_2)$ حيث $x_1\in A$ و $x_2\in B$.

تعريف:

قدرة المقطع هي مجموع قدرات أقواس أي:

$$c(\vec{L})=c(A/B)=\sum_{\substack{x_1\in A\\ x_2\in B}} c(x_1,x_2)$$

تمثل الأقواس ذات الخطوط المضاعفة في المثال السابق مقطعاً علماً بأن العقد A معلمة باللون الغامق والعقدة B معلمة باللون الفاتح قدرة هذا المقطع $c(\bar{L})=13$ قبل أن نصوغ فرضية فون– فولكلرزون سنعرض بعض التوطئات:

تمهيدية:

ليكن φ تدفق تيار في شبكة $\vec{G}(X,\vec{E})$: حيث $\varphi(\vec{e}_0)=\varphi(S,Q)=\varphi_0$ وليكن $L=(A/B)$ مقطع ما من هذه الشبكة عندئذ يكون:

$$\sum_{\vec{e}\in W^{+}(A)}\varphi(\vec{e}) = \sum_{\substack{\vec{e}\in W^{-}(p)\\ \vec{e}\neq\vec{e}_0}}\varphi(\vec{e}) + \varphi_0$$

الإثبات:

واضح أن شرط التدفق محقق في كل عقدة. إن مجموع التدفق من عقد المجموعة A الذي يصب في بعض عقد المجموعة B يساوي مجموع تدفق من عقد المجموعة B التي تصب في عقد المجموعة A وهو المطلوب.

تمهيدية:

ليكن φ تدفقاً مسموحاً به في شبكة وليكن φ_0 معرفاً كالسابق عندئذ يكون لأجل أي مقطع $c(A,B)$ مثل L تتحقق العلاقة:

$$c(A,B)\geq\varphi_0$$

الإثبات:

بما أن مجموع التدفق من عقد A (مع العلم بأن $Q\in A$) يمكن أن تنتقل إلى عقدة في المجموعة B (علماً بأن $S\in B$) ومنه فالشرط السابق محقق.

تمهيدية:

من أجل مقطع خاص $\vec{L}_0 = (A_0 / B_0)$ وتدفق ما φ فإن $\varphi_0 = c(A_0 / B_0)$ عندئذ يكون φ_0 أعظمياً.

تعريف:

نقول عن $\vec{L}_0$ أنه مقطع أصغري إذا تحقق $c(\vec{L}_0) \le c(\vec{L})$.

تمهيدية:

لتكن $\vec{G} = (V, \vec{E})$ شبكة. وليكن $\vec{L}$ مقطعاً ذا قدرة منتهية عندئذ يوجد في G تدفق أعظمي φ_0. أي: من أجل تدفق اختياري φ يكون:

$$\varphi(\vec{e}_0) \le \varphi_0(\vec{e}_0)$$

الإثبات:

بما أن البيان الموجه $\vec{G}$ منته عندئذ يكون أي مقطع في هذا البيان منتهياً أي يوجد على الأقل مقطع واحد منته ومنه فإنه لا يوجد مقطع أصغر من $\vec{L}_0$ ومنه يوجد في هذه الشبكة تدفق φ_0 يحقق الشرط:

$$\varphi(e_0) \le \varphi_0(L_0)$$

نستطيع أن نربط بين هذا الإثبات وخوارزمية فورد- فولكرزون ويمكن إثبات هذه المبرهنة باستخدام نظرية الأمثليات الخطية لأن مثل هذه المسألة عولجت في البرمجة الخطية.

10- خوارزمية فولكرزون:

ليكن φ_1 تدفقاً في البيان الموجه $\vec{G}$ (مثلاً $\varphi_1 = 0$ تدفق ممكن) بحيث يكون محققاً للشرط التالي:

$$\forall \vec{e} \in \vec{E} \ : \ 0 \le \varphi_1(\vec{e}) \le c(\vec{e})$$

بما أن قدرة أي ضلع يمكن أن تكون أعداداً صحيحة فيمكن أن تأخذ التدفق عدداً صحيحاً أيضاً.

خطوات الخوارزمية:

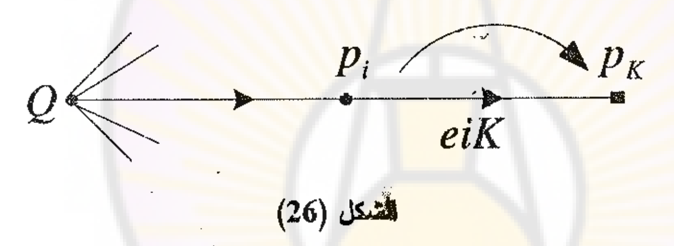
أ. خطوة التعليم (التلوين):

أ- نلوّن Q حيث Q المنبع.

ب- بفرض $P_K \in V$ عقدة لوّنت عندئذ نلوّن جميع العقد $P_i \in \bar{X}$ اللاحقة للعقدة P_K والتي تحقق العلاقة:

$$\varphi_1(p_K, p_i) < c(p_K, p_i)$$

(P_i لاحقة لـ P_K يوجد قوس ينطلق من P_K إلى P_i).

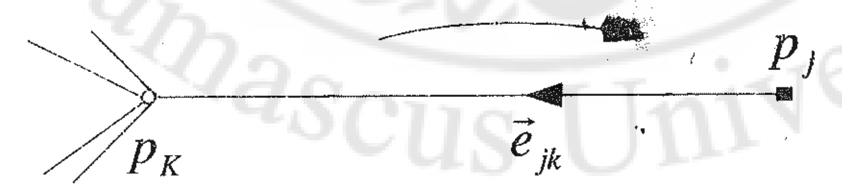


الشكل (26)

ت- بفرض $P_K \in V$ عقدة لونت عندئذ نلوّن جميع العقد $P_J \in V$ السابقة للعقدة P_K والتي تحقق العلاقة:

$$\varphi_1(p_J, p_K) > 0$$

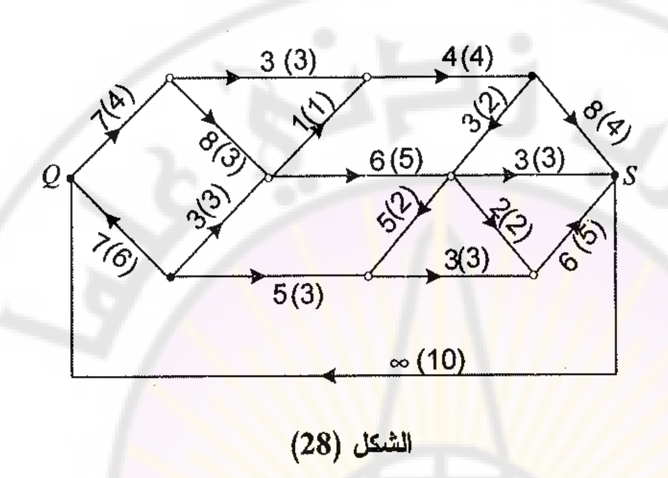
(P_J سابقة لـ P_K يوجد قوس ينطلق من P_J إلى P_K).



الشكل (27)

ii. خطوة التحسين:

إذا استطعنا بواسطة خطوة التعليم أن نصل إلى S عندئذ نستطيع أن نحسن التدفق.



الشكل (28)

وجدنا سلسلة من الأقواس من Q حتى S عندئذ يمكن تحسين التدفق على الأقل بمقدار $+1$.

لتكن السلسلة $\vec{K} = (Q = p_1, p_2, \dots, p_r = S)$.

سنلون النقاط وفق الخاصة (ب) بالون الغامق ثم نلون النقاط الباقية وفق الخاصة (جـ) بالون الفاتح.

1. من أجل القوس (p_I, p_{I+1}) من السلسلة $\vec{K}$ الذي جهة السلسلة (الهدف) نفسها فإن العقدة p_{I+1} تلوّن وفق التعليم (ب) ونضع:

$$\varphi_2(p_I, p_{I+1}) = \varphi_2(p_I, p_{I+1}) + 1$$

2. من أجل القوس (p_I, p_{I+1}) الذي يعاكس جهة السلسلة نلوّن العقدة p_{I+1} وفق خطوة التعليم (جـ) ونضع:

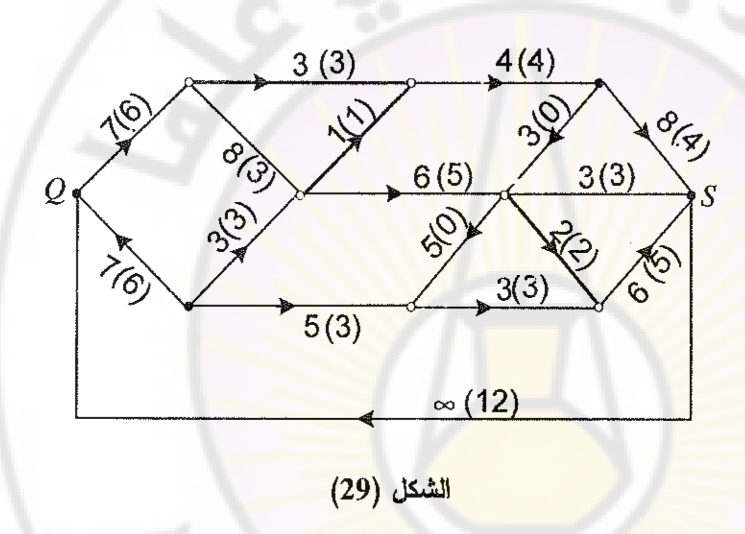
$$\varphi_2(p_I, p_{I+1}) = \varphi_2(p_I, p_{I+1}) - 1$$

3. نضع $\varphi_2(\vec{e}_0) = \varphi_2(\vec{e}_0) + 1$.

4. من أجل الأقواس التي لا تقع في هذه السلسلة نضع:

$$\varphi_2(\vec{e}) = \varphi_2(\vec{e}) \quad , \quad \vec{e} \in \vec{K}$$

نطبق خطوة التحسين على المثال فنجد أنه يمكن تحسين التدفق على e_0 بمقدار 2 .



الشكل (29)

تمارين

1- ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}$ الذي مصفوفة أطوال أقواسه معطاة كما يلي:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & \infty & 9 \\ 12 & 0 & 9 & \infty & 16 \\ 9 & 25 & 0 & \infty & 36 \\ 25 & 49 & 4 & 0 & 3 \\ 100 & 16 & 49 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

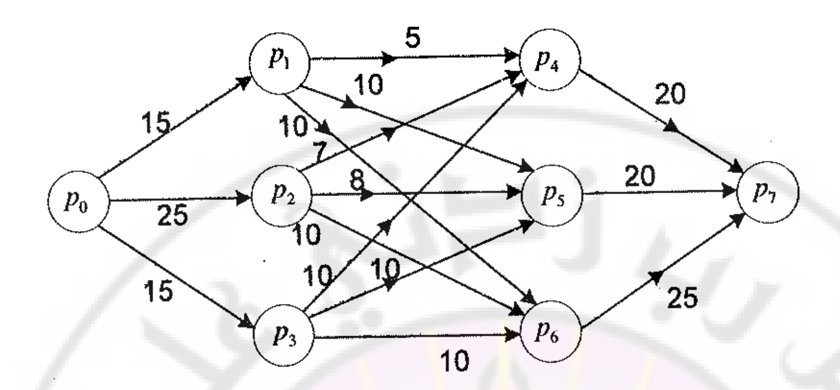
أوجد مصفوفة الأبعاد $D(\vec{G})$؟

2- ليكن لدينا البيان الموجه $\vec{G}$ الذي مصفوفة أطوال أقواسه معطاة كما يلي:

$$D=\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 0 & 4 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & \infty & 3 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة الأبعاد $D(\vec{G})$.

3- لتكن لدينا الشبكة التالية:



طبق خوارزمية ديجيكستر لإيجاد الطريق ذي الكلفة الأصغرية الذي يصل مركز التصدير " المنبع" (p_0) بمركز الاستهلاك "المصب" (p_7)

4- ليكن لدينا البيان الذي مصفوفته:

$$B = \begin{pmatrix} \infty & 36 & 26 & 18 & 25 & 17 \\ 3 & \infty & 5 & 6 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & \infty & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & \infty & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \infty & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

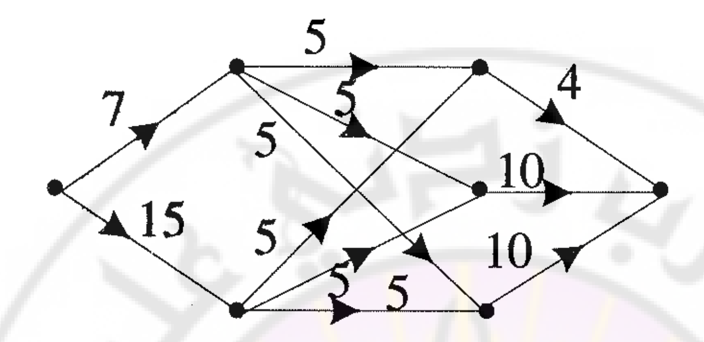
وأجد مصفوفة الكلفة الصغرى؟

5- ليكن لدينا البيان الذي مصفوفته:

$$B = \begin{pmatrix} \infty & 4 & 2 & 5 \\ 6 & \infty & 5 & 6 \\ 9 & 7 & \infty & 3 \\ 12 & 10 & 4 & \infty \end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة الكلفة الصغرى؟

6- أوجد حل شبكة النقل التالية:



طبق خوارزمية التيار (التدفق) الأعظمي، وذلك لإيجاد الحل الأمثل.



المصطلحات العلمية

Adjacency matrix	مصفوفة التجاور
Admittance matrix	مصفوفة الإدخال
Algorithm	خوارزمية
Associative	تجميعي
Basis	أساس
Bipartite Graph	بيان زوجي (ثنائي)
Boolean algebra	جبر بولي
Branch	فرع
Breadth-first search	بحث عرضي
Bridge	جسر
Cartesian product	حاصل ضرب الديكارتي
Cell	خلية
Center	مركز
Chain	سلسلة

Characterization	تمييز
Circuit	دائرة
Closed	مغلف
Code	شيفرة
Column	عمود
Combinations	التراكيب
Commutative	إبدالي
Complement	متمم
Complement of the relation R	العلاقة المتممة للعلاقة R
Complementary graph	بيان متمم
Complete bipartite graph	بيان تام زوجي
Complete Graph	بيان تام
Complete Relation	العلاقة التامة
Component	مركبة
Composition	تحصيل

Conclusion	نتيجة
condition	الشرط
Conditional	شرطي
Conjunction	عطف
Connected	مترابطة
Connected Component	مركبة مترابطة
Connected Connectives	أدوات الربط
Connected Graph	بيان مترابط
Consistency	إتساق
Consistent	متسق
Contra positive	مكافيء عكسي
Contradiction	تناقض
Converse	عكس
Counter example	مثال معاكس
Cover	غطاء

Critical	حرج
Cycle	دائرة
Decode	يفك الشيفرة
Degree	درجة (قدرة)
Depth	عمق
Diagonal	قطر
Diagonal Relation	علاقة قطرية
Direct proof	البرهان مباشر
Directed edge	ضلع موجه
Directed Graph	بيان موجه
Discrete	متقطع
Disjunction	فصل
Distance	مسافة
Distance	مسافة
Dual	ثنوي (مرافق)

Dual Expression	عبارة ثنوية
Edge	ضلع
Encoding (coding)	تشفير
End point	طرف
Equivalence	تكافؤ
Equivalence Relation	علاقة تكافؤ
Euler Ian graph	بيان أويلري
Euler's formula	صيغة أويلر
Even vertex	عقدة زوجية
Expression	عبارة
Face	وجه
False	خاطئ
Figure	شكل
Finite graph	بيان منته
Forest	غابة

Form	شكل
Frequency	تكرار (تردد)
Function	دالة
Graph	بيان
Graph theory	نظرية البيان
Graph Theory	نظرية البيانات
Hassle diagram	شكل هاسل
Height	إرتفاع
Hypothesis	فرضية
Immediate predecessor	مرجع مباشر
In order traversal	تسلق داخلي
Incidence matrix	مصفوفة التأثير
Induce	يولد
Induce sub graph	البيان الجزئي المولد
Inductive step	خطوة الاستقراء

Inspection	تقاطع
Internal vertex	عقدة داخلية
Invariant	لا متغير
Inverse	معاكس
Invertors	بوابة معاكسة
Isolated vertex	عقدة منعزلة
Isomorphic	متشاكل
Isomorphic Invariant	لا متغير متشاكلي
Karnaugh map	شكل كارنو
Label	علامة
Language	لغة
Law	قانون
Leaf	ورقة
Length	طول
Letter	حرف

Level	مستوى
Loop	عروة
Main diagonal	القطر الرئيسي
Map	خارطة
Mathematical induction	الاستقراء الرياضي
Mathematical model	أنموذج رياضي
Maximum	أعظمي
Maximum flow	التدفق الأعظمي
Max term	حد أعظمي
Minimum	أصغري
Min term	حد أصغري
Mixed	مختلط
Model	أنموذج
Multiple edge	ضلع مضاعف
Necessary and sufficient condition	شرط لازم وكاف

Necessary Condition	شرط لازم
Network	شبكة
Odd	فردي
Odd vertex	عقدة فردية
Of duality	مبدأ الثنوية
One-to-one	أحادي (متباين)
Only if	فقط إذا
Onto	غامر
Open	مفتوح
Open sentence	جملة مفتوحة
Optimal	أمثل
Order relation	علاقة ترتيب
Ordered	مرتب
Ordered pair	زوج مرتب
Partition	تجزئة

Path	ممر
Permutations	التباديل
Pigeonhole principle	مبدأ برج الحمام
Planar graph	بيان مستو
Polish postfix notation	الترميز البولندي العكسي
Polish prefix notation	الترميز البولندي (المباشر)
Post order traversal	تسلق عكسي
Power set	مجموعة القوة
Predecessor	مرجع
Preorder traversal	تسلق مباشر
Principle	مبدأ
Product of sums	جداء مجاميع تام
Proof by Contraposition	البرهان بوساطة المكافئ المعاكسي
Proof by Contradiction	البرهان بوساطة التناقض
Proof by cases	البرهان بوساطة الحالات

Proof by Counterexample	البرهان بوساطة المثال المناقض
Proof by Exhaustion	البرهان بوساطة الاستنفاد
Propositional expression	عبارة تقريرية
Propositional Form	عبارة تقريرية
Range	مدى
Rank	رتبة
Rectangle	مستطيل
Reflexive	انعكاسية
Region	منطقة
Regular binary Graph	بيان منتظم ثنائي
Regular binary tree	شجرة ثنائية منتظمة
Relation	علاقة
Relation On	علاقة على
Representation	تمثيل
Root	جذر

Round travel problem	السياحة الدائرية
Row	سطر (صف)
Scaffold	سقالة
Search tree	شجرة بحث
Semi-Eulerian graph	بيان نصف أويلر
Sequence	متتالية
Set	مجموعة متقطعة
Simple	بسيط
Simplification	تبسيط
Skew symmetric	تخالفيه
Spanning (sub graph)	مولد(بيان جزئي مولد)
Spanning Tree	شجرة مولدة
step	خطوة
Sub graph	بيان جزئي
Sub tree	شجرة جزئية

Substitution	تعويض
Successor	تابع مباشر
Sum of products	مجموع جداءات تام
Symmetric	تناظري
Table	جدول
Trail	طريق
Transitive	متعدية
tree	شجرة
Tree	شجرة
Union	إتحاد
Unique	وحيد
Uniqueness	وحدانية
Walk	مسار
Weight	وزن
Well-ordering	ترتيب



المراجع العلمية

1- د. حمدو النجار "*نظرية البيان*" مطبوعات جامعة حلب 2007

2- د. خالد خنيفس " ***التنهيج الخطي*** " مطبوعات جامعة دمشق 1994-1995

3- د. معروف عبد الرحمن سمحان – د. أحمد حميد شراري " ***مبادئ الرياضيات المتقطعة***" مطبوعات جامعة الملك سعود 1997

4- A. Brandstädt "*Graphen und Algorithmen*" Teubner, 1994.

5- C. Berg "*Graphs*" Dunod-Bordas, Paris 1970.

6- D. Jungnickel "*Graphen, Netzwerke und Algorithmen*" Spektrum Akademischer Verlag, 1994.

7- D. Jungnickel "*Graphs, Networks and Algorithms*" Springer 2004

8- Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman " *Introduction to Operations Research*" McGraw Hill Higher Education, ISBN 007123828X

9- Gerd Heinrich, Jürgen Grass (2006) "*Operations Research in der Praxis* " Oldenbourg Verlag, München ISBN 978-3-486-58032-7

10- H. Sachs "Einfuehrung in die Theorie der endlichen Graphen" BsB. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1970.

11- Hans-Jürgen Zimmermann " *Operations Research. Methoden und Modelle. Für Wirtschaftsingenieure, Betriebswirte, Informatiker, Mathematiker*" Vieweg, Wiesbaden 2005, ISBN 3-528-03210-3

12- Heiner Müller-Merbach " *Operations Research*. " Verlag Vahlen, München 1973, ISBN 3-8006-0388-8

13- Klaus Neumann, Martin Morlock:"Operations Research." Carl Hanser Verlag, München Wien 2004, ISBN 3-446-22140-9

14- M. Nitzsche "*Graphen für Einsteiger*" Vieweg, 2005.

15- P. Stingl "*Operations Research. Linearoptimierung*" Hanser Fachbuchverlag, 2002.
16- P. Tittmann "*Graphentheorie*" Hanser Fachbuchverlag, 2003.
17- S. O. Krumke, H. Noltemeier "*Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*" Teubner, 2005.
18- S. O. Kumke, H. Noltemeier "*Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*" Teubner 2005.
19- S. O. Kumke, H. Noltemeier "*Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*" Teubner2005
20- T. Ihringer "*Diskrete Mathematik*" Teubner, 1999.
21- Ulrich Kathöfer, Ulrich Müller-Funk "*Operations Research*" UTB/UVK 2008, ISBN 978-3-825-22712-8
22- V. K. Balakrishnan "*Schaum's Outline of Graph Theory. Including Hundreds of Solved Problems*" McGraw-Hill, 1997.
23- V. Turau "*Algorithmische Graphentheorie*" Oldenbourg, 2004.
24- V. Turau "*Algorithmische Graphentheorie*" Oldenbourg 2004
25- Walter H. "Anwendung des Graphentheorie" BsB. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1970.
26- Wolfgang Domschke, Andreas Drexl "*Einführung in Operations Research*" Springer, Berlin 2007, ISBN 978-3-540-70948-0
27- Zbigniew Michalewicz, David B.Fogel " *How to solve it: Modern Heuristics*."Springer Verlag,ISBN 3-540-22494-7

التدقيق اللغوي

د. نبيل أبو عمشة


وقل رب زدني علما
جامعة دمشق
Damascus University



